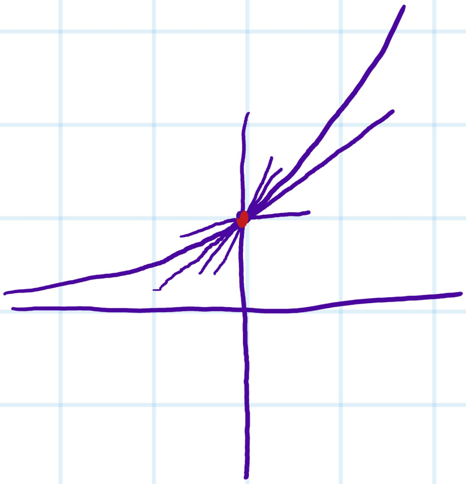
Lezione 23: Differenziabilità

INDICE

$\boxed{\text{Es}}$



$$y = mx + 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

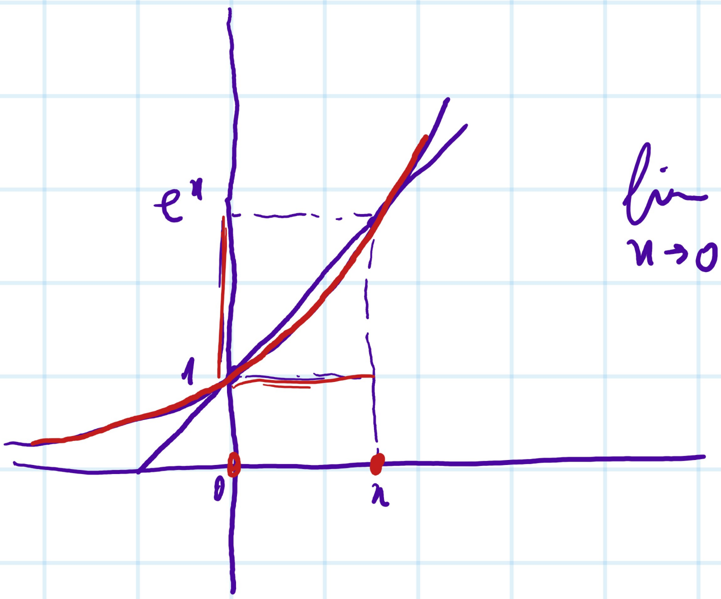
$$e^x - 1 \approx x$$

$$\boxed{e^x = 1 + x + o(x)}$$

$$e^x - \overline{(mx+1)} =$$

$$= \cancel{1} + x + o(x) - mx - \cancel{1} =$$

$$= (1-m)x + o(x) \begin{cases} \xrightarrow{m \neq 1} \approx (1-m)x \\ \xrightarrow{m = 1} o(x) \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

DEF. 1 DATI $A \subset \mathbb{R}$ $f: A \to \mathbb{R}$ x_0 INTERNO AD A, DIREMO CHE f È DERIVABILE IN x_0 SE $\exists$ FINITO

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

(POL. 1° g.)

DEF. 2 DATI $A \subset \mathbb{R}$ $f: A \to \mathbb{R}$ x_0 INTERNO AD A E DATA LA RETTA $y = r(x)$ DIREMO CHE $y = r(x)$ È RETTA TANGENTE A f PER $x = x_0$, SE:

$$\text{PER } x \to x_0 \quad f(x) - r(x) = o(x-x_0)$$

T. DATI $A \subset \mathbb{R}$ $f: A \to \mathbb{R}$ E x_0 INTERNO AD A È EQUIVALENTE AFFERMARE CHE

1) f È DERIVABILE IN x_0 ED HA DERIVATA $m \in \mathbb{R}$
2) $\exists$ $y = r(x)$ RETTA TANGENTE A f PER $x = x_0$ ED HA PENDENZA m.

DIM

$(1) \Rightarrow (2)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \underset{\mathbb{R}}{m}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - m = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + m(x-x_0))}{(x-x_0)} = 0$$

$$f(x) - (\underbrace{f(x_0) + m(x-x_0)}_{r(x)}) = o(x-x_0)$$

$(2) \Rightarrow (1)$ $\quad \exists\, r(x) = \underline{ax+b} = ax - ax_0 + ax_0 + b =$

$$= a(x-x_0) + (ax_0+b)$$

$$= \boxed{m(x-x_0) + B}$$

$$f(x) - \left(m(x-x_0)+B\right) = o(x-x_0)$$

$$\left.\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - (m(x-x_0)+B)}{x-x_0} = 0 \right\} \Rightarrow f(x_0) = B$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m(x-x_0)}{x-x_0} = 0$$

$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - m\right) = 0$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = m \Rightarrow f \text{ È DER. IN } x_0 \text{ E } f'(x_0) = m$$

T. DATI $A \subset \mathbb{R}$ $f : A \to \mathbb{R}$ $x_0 \in \mathring{A}$. SE f È DERIVABILE IN x_0 ALLORA f È CONTINUA IN x_0.

DIM DEVO DIMOSTRARE CHE $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \left(f(x) - f(x_0) + f(x_0)\right) = \lim_{x\to x_0} \left(\overbrace{\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'(x_0)} \underbrace{(x-x_0)}_{0}}^{0} + f(x_0)\right)$$

$$= 0 + f(x_0) = f(x_0)$$

INTORNO DESTRO (SINISTRO)

DEF DATI $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $x \in A$ T.C. $\exists\, \delta > 0$ t.q. $[x_0, x_0+\delta) \subset A$. ($[x_0-\delta, x_0]$)

DIREMO CHE f È DERIVABILE A DESTRA IN x_0 SE

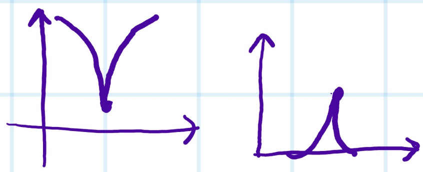
$$\lim_{x \to x_0^{+(-)}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_{+(-)}(x_0) \in \mathbb{R}$$

SCRIVERÒ ANCHE $f'_+(x_0) = +\infty$ $(-\infty)$ se il limite vale $\pm\infty$

MA NON DIRÒ CHE f È DERIV. A DESTRA.

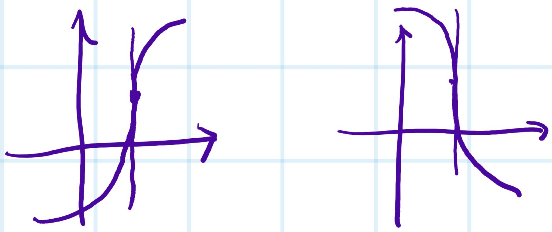
CLASSIFICAZIONE PT. NON DER. (MA SONO DI CONTINUITÀ)

CUSPIDE



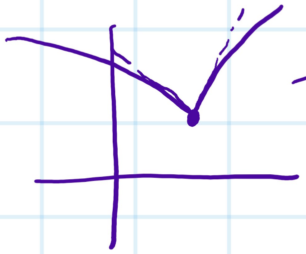
$\to$ $f'_+(x_0)$ $f'_-(x_0)$ SONO INFINITI DI SEGNO DIVERSO

FLESSO A TANG. VERTICALE



$\to$ $f'_+(x_0)$ $f'_-(x_0)$ SONO INFINITI CON STESSO SEGNO

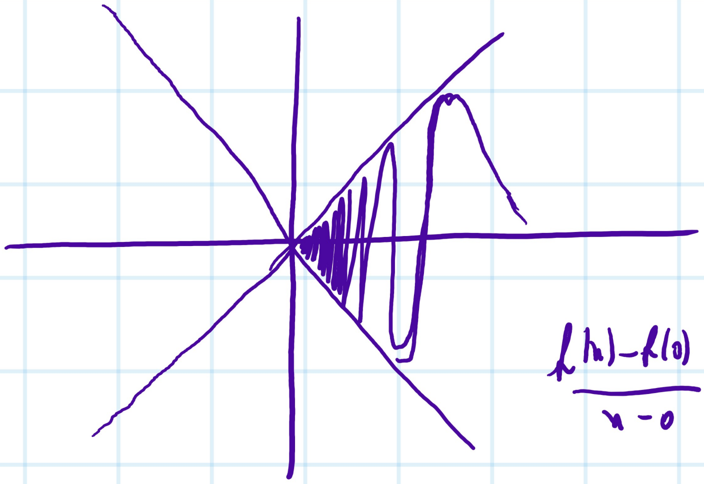
PT. ANGOLOSO



$\to$ $f'_+(x_0)$ $f'_-(x_0)$ SONO O ENTRAMBI FINITI MA DIVERSI

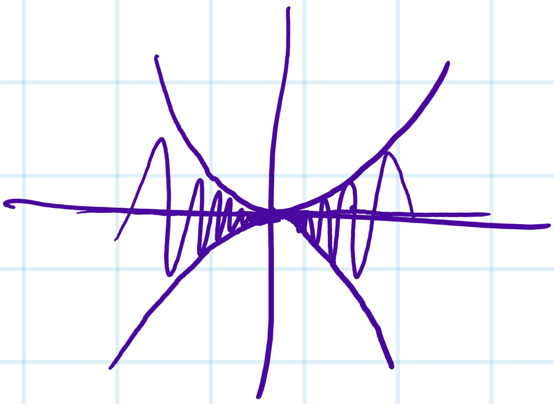
O UNO FINITO E L'ALTRO INFINITO

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\cancel{x} \sin \frac{1}{x}}{\cancel{x}} = \sin \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

$\boxed{T}$ DATI $A \subset \mathbb{R}$ $x_0 \in \mathring{A}$ $f, g : A \to \mathbb{R}$ DERIVABILI IN x_0.

ALLORA:

1) $f(x) + g(x)$ È DERIVABILE (IN x_0) E $(f+g)' = f' + g'$

2) $f(x) \cdot g(x)$ È DERIVABILE (IN x_0) E $(f \cdot g)' = f'g + fg'$

3) SE $g(x_0) \neq 0$ $\frac{f(x)}{g(x)}$ È DER. IN x_0 E $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

$\boxed{DIM}$

(1)

$$\lim \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= f'(x_0) + g'(x_0)$$

(2)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) g(x) - f(x) \cdot g(x_0) + f(x) \cdot g(x_0) - f(x_0) g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(\underbrace{f(x)}_{\downarrow\, f(x_0)} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}}_{\downarrow\, g'(x_0)} + \underbrace{g(x_0)}_{\downarrow\, g(x_0)} \underbrace{\boxed{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}}_{\downarrow\, f'(x_0)} \right) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$$

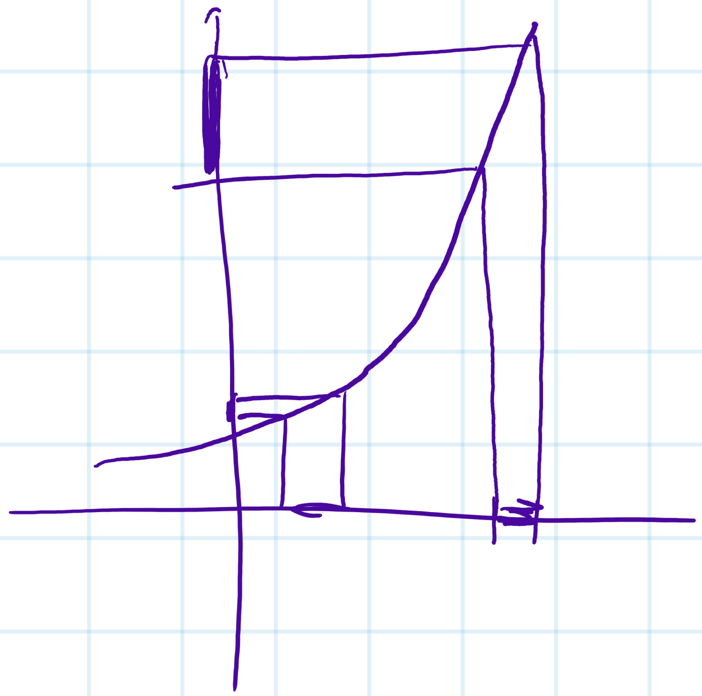
(3) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \boxed{\dfrac{1}{g(x)}}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{\underbrace{g(x) \cdot g(x_0)}_{g(x_0) \cdot g(x_0)} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{-g'(x_0)}} = \frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' =$$

$$= f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot \left(-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}\right) =$$

$$= \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$



$\boxed{\text{T.}}$ DATI $A, B \subset \mathbb{R}$ $\quad g: A \to B \quad f: B \to \mathbb{R} \quad x_0 \in \mathring{A} \quad y_0 = g(x_0) \in \mathring{B}$

g DERIVABILE IN x_0, f DERIVABILE IN $y_0 = g(x_0)$.

ALLORA $f \circ g : A \to \mathbb{R}$ È DERIVABILE IN x_0 E SI HA:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(\underbrace{g(x_0)}_{y_0}) \cdot g'(x_0)$$

$\boxed{\text{DIM}}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \boxed{\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)}} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}}_{g'(x_0)} = \underline{f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)}$$

$$\boxed{\frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}} \to f'(y_0) = f'(g(x_0))$$

SE $\exists\, I$ INTORNO DI x_0 T.C. $\forall x \in I \;\; g(x) \neq g(x_0)$ LA ① VALE

SE NO SIGNIFICA CHE $\forall\, I$ INT. DI x_0 $\exists\, x \in I$ t.c. $g(x) = g(x_0)$

QUINDI IN OGNI INTORNO DI x_0 $\exists\, x$ t.c. $\boxed{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = 0$

QUINDI $g'(x_0) = 0$ PERCHÉ $\lim_{x \to x_0} \square$ ESISTE FINITO QUINDI DEVE ESSERE 0.

SIA

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} & \text{SE } g(x) \neq g(x_0) \\ 0 & \text{SE } g(x) = g(x_0) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to x_0} \boxed{\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0}} = 0$$

$$f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

$\boxed{T.}$ DATI $A \subseteq \mathbb{R}$ $x_0 \in \mathring{A}$ $f: A \to \mathbb{R}$ INVERTIBILE E T.C. $f'(x_0) = \lambda \neq 0$

ALLORA f^{-1} È DERIVABILE IN $y_0 = f(x_0)$ E

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$\boxed{DIM}$

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$y = f(x)$

$f(x)$ è continua e biunivoca