Lezione 25: Conseguenze T. Lagrange

INDICE

1) MONOTONIA E SEGNO DELLA DERIVATA
2) CARATTERIZZAZIONE DELLE PRIMITIVE
3) LIPSCHITZIANITÀ E LIMITATEZZA DELLA DERIVATA
4) ESTENSIONE DERIVABILE DI UNA FUNZIONE CON $f'(x) \to$ LIMITE FINITO IN UN ESTREMO
5) f' MANDA INTERVALLI IN INTERVALLI
6) UTILIZZO T. LAGRANGE NEL CALCOLO DI LIMITI "STRANI".

ESEMPIO: $\lim_{x \to 0^+} \frac{\arctan(x + x^{2023}) - \arctan x - x^{2023}}{x^\alpha}$ (AL VARIARE DI $\alpha > 0$)

$\boxed{\text{DEF.}}$ DATO $A \subset \mathbb{R}$ ED $f : A \to \mathbb{R}$ DIREMO CHE

1) f È CRESC. SU A SE $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
2) DECR. $\geq$
3) STR.CR $f(x_1) < f(x_2)$
4) DEC. $f(x_1) > f(x_2)$

(1) $\boxed{T}$. DATA $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ DERIVABILE, ALLORA VALGONO LE IMPLICAZIONI

1) f È CRESCENTE SU (a,b) $\Longleftrightarrow$ $\forall x\in(a,b)$ $f'(x)\geq 0$

2) DECR. . . . . ≤ 0

3) f È STRETT. CRESCENTE $\Longleftarrow$ $\forall x\in(a,b)$ $f'(x)>0$

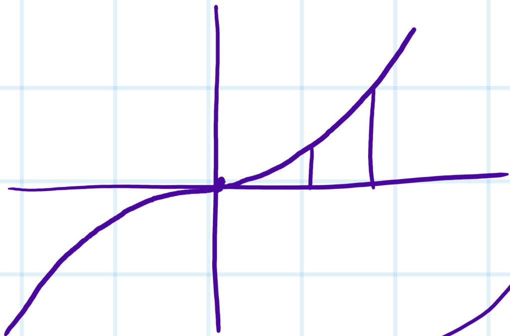
4) DEC. . . . . . $\Longleftarrow$ <0

$\boxed{DIM}$ (1) $\Rightarrow$ $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\geq 0}$ $\Rightarrow$ $f'(x_0)\geq 0$

$\Leftarrow$ INFATTI OGNI RAPP. INC. $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(c)\geq 0$

$c\in(x_1,x_2)$

(3) $f(x)=x^3$ $f'(x)=3x^2$ $f'(0)=0$



$\Rightarrow$ NON VALE

$\Leftarrow$ $\forall x_1,x_2\in(a,b)$ $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(c)>0$

$c\in(x_1,x_2)$

(2) **DEF.** DICIAMO CHE $F(x)$ È PRIMITIVA DI $f(x)$ SE $F'(x) = f(x)$.

T DATO (a,b) INTERVALLO, SIA $F:(a,b) \to \mathbb{R}$ PRIMITIVA DI $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, ALLORA L'INSIEME DI TUTTE LE PRIMITIVE DI $f(x)$ È DATO DALLA FAMIGLIA

$$F(x) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

DIM

$F(x)$ È PRIMITIVA DI $f(x)$ ANCHE $F(x)+c$ LO È PERCHÉ

$$\left(F(x) + c \right)' = F'(x) + c' = F'(x) = f(x)$$

VICEVERSA SE $F(x)$ E $G(x)$ SONO ENTRAMBE PRIMITIVE DI $f(x)$ ALLORA SI HA

$$\left(\underbrace{G(x) - F(x)} \right)' = f(x) - f(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$G(x) - F(x) = c$$

$$G(x) = F(x) + c.$$

LEMMA SE $g:(a,b) \to \mathbb{R}$ È TALE CHE $g'(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$ ALLORA $g(x)$ È COSTANTE

DIM

SE P.A. CI FOSSERO $x_1, x_2 \in (a,b)$ t.c. $g(x_1) \neq g(x_2)$ ALLORA

$$\underbrace{\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}} \neq 0$$

LAGR. $\to$ ||

$$g'(c) = 0$$

CON $c \in (x_1, x_2)$

(3) $\boxed{\text{T.}}$ DATA $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ DERIVABILE. SE $f'(x)$ È LIMITATA SU (a,b)

ALLORA $f(x)$ È LIPSCHITZIANA CON COSTANTE $L=\sup_{x\in(a,b)}|f'(x)|$

$\boxed{\text{DIM}}$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(c) \qquad \text{COMPRESO TRA } x \text{ E } y$$

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = |f'(c)| \le L$$

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}\le L$$

$$\Downarrow$$

$$|f(x)-f(y)|\le L\,|x-y|$$

---

(4) $\boxed{\text{T.}}$ DATA $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ DERIVABILE E TALE CHE $\lim_{x\to a^+} f'(x)=\ell\in\mathbb{R}$

ALLORA $\exists \lim_{x\to a^+} f(x)=\bar{y}$ E $F(x)=\begin{cases} f(x) & x\in(a,b)\\ \bar{y} & x=a\end{cases}$

È DERIVABILE A DESTRA IN a E $F'_+(a)=\ell$

$\boxed{\text{DIM}}$

POICHÉ $\lim_{x\to a^+} f'(x)=\ell$ $\quad\exists\,\delta>0$ t.c. $x\in(a,a+\delta)$

ALLORA $\ell-1<f'(x)<\ell+1$

$\Rightarrow$ f È LIPSCH. SU $(a, a+\delta)$ $\Rightarrow$ f È U.C. SU $(a, a+\delta)$

QUINDI È ESTENDIBILE CON CONTINUITÀ IN $[a, b)$.

$$a < c(x) < x$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$a \quad a \quad a$$

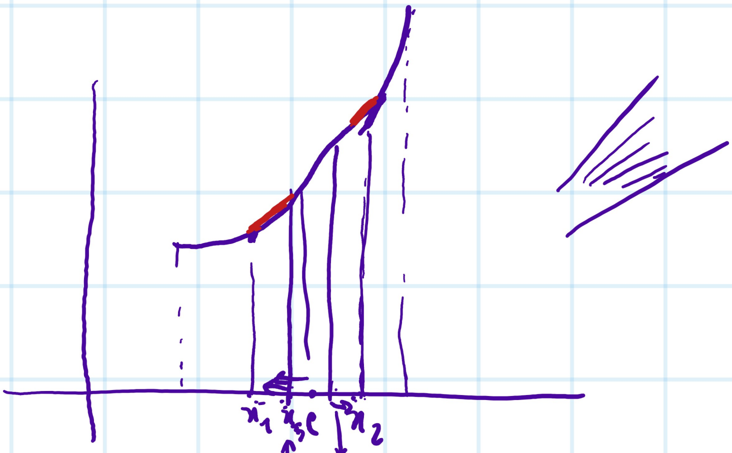
$$c = c(x)$$

MOSTRO ORA CHE $f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} f'(x)$

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^+} f'(c(x)) = \lim_{c \to a^+} f'(c) = \ell$$

PER T. DI LAG., $\forall x \in (a, b)$ $\exists\, c(x) \in (a, x)$ T.C.

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c(x))$$



$$f'(x_1) < \lambda < f'(x_2) \qquad f'(c) = \lambda$$

5 $\boxed{\text{T.}}$ DATA $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ DERIVABILE, f' MANDA INTERVALLI IN INTERVALLI.

$\boxed{\text{DIM}}$ SIANO $x_1, x_2 \in (a,b)$ PRENDIAMO $f'(x_1)$ E $f'(x_2)$ E MOSTRIAMO CHE $\forall \lambda$ COMPRESO TRA $f'(x_1)$ E $f'(x_2)$

$\exists c \in (x_1, x_2)$ t.c. $f'(c)=\lambda$

2 CASI: $\underbrace{f'(x_1) < f'(x_2)}_{\text{FACCIO} \uparrow}$, $f'(x_1) > f'(x_2)$ (ALTRO È UGUALE)

$f'(x_1) < \lambda < f'(x_2)$

$f'(x_1)$ λ $f'(x_2)$ $\mathbb{R}$

POICHE $f'(x_1) = \lim\limits_{x\to x_1^+} \dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ $\exists x_3 \in (x_1, x_2)$ t.c.

$$f'(x_1) < \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} < \lambda$$

ANALOGAMENTE $\exists x_4 \in (x_1, x_2)$ t.c. $\lambda < \dfrac{f(x_4)-f(x_2)}{x_4-x_2} < f'(x_2)$

N.B. POSSO SEMPRE FARE IN MODO CHE $x_1 < x_3 < x_4 < x_2$

$R(x_1,x_3) < \lambda < R(x_4,x_2)$

$H(x) = \dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ È CONTINUA SU $[x_3, x_2]$

$K(x) = \dfrac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$ È CONTINUA SU $[x_1, x_4]$

$H(x_3) = \boxed{\dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}} < \lambda$ $H(x_2) = \boxed{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}} = K(x_1)$ $K(x_4) = \boxed{\dfrac{f(x_4)-f(x_2)}{x_4-x_2}}$ $\lambda <$

QUINDI $\exists$ RAPP. INCR. DI f CHE VALE λ, QUINDI PER T. LAGRANGE

$\exists\, c$ t.c. $f'(c) = \lambda$. $\blacksquare$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\boxed{\arctan(x + x^{2023}) - \arctan x} - x^{2023}}{x^{\alpha}}$$

$$f(x + x^{n}) - f(x) - x^{n}$$

$$= \frac{\arctan(x + x^{2023}) - \arctan x}{x^{2023}} \cdot x^{2023} =$$

$$= \frac{\arctan(x + x^{2023}) - \arctan x}{(x + x^{2023}) - x} \cdot x^{2023} =$$

$$= \frac{1}{1 + (c(x))^2} \cdot x^{2023} =$$

$x < c(x) < x + x^{2023}$

$x + \delta(x)$

$x < x + \delta(x) < x + x^{2023}$

$0 < \delta(x) < x^{2023}$

$\delta(x) = O(x^{2023})$

$$= \frac{1}{1 + (x + \delta(x))^2} \cdot x^{2023} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{1 + (x + O(x^{2023}))^2} \cdot x^{2023}}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{1 + (x + O(x^{2023}))^2} \cdot x^{2023} - x^{2023}}{x^{\alpha}} =$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^{2023} \cdot \overbrace{\left(\frac{1}{1+\left(x+O(x^{2023})\right)^2} - 1 \right)}}{x^\alpha} =$$

$$\frac{\cancel{1} - \left(\cancel{1} + \left(x+O(x^{2023})\right)^2\right)}{1+\left(x+O(x^{2023})\right)^2} =$$

$$= - \frac{x^2 + 2x\,O(x^{2023}) + \left(O(x^{2023})\right)^2}{1+\left(x+O(x^{2023})\right)^2} =$$

$$\approx - \frac{x^2 + o(x^2)}{1+o(1)} \approx -x^2$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^{2023}(-x^2)}{x^\alpha} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x^{2025}}{x^\alpha} = \begin{cases} \alpha > 2025: & = -\infty \\ \alpha = 2025: & = -1 \\ \alpha < 2025: & = 0 \end{cases}$$