Lezione 27: Polinomio di Taylor

INDICE

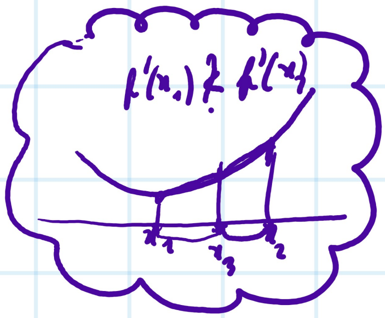
1) T. DI DE L'HOPITAL
2) POL. DI TAYLOR (DEFINIZ.)
3) POL. DI TAYLOR (CARATTERIZZAZIONE - RESTO DI PEANO)
4) SVILUPPI DI TAYLOR DI ALCUNE FUNZIONI ELEMENTARI:

$\left(e^x,\ \sin x,\ \cos x,\ \frac{1}{1-x},\ \ln(1+x),\ \arctan x,\ (1+x)^\alpha\right)$

DA SCORSA LEZIONE

$\boxed{T.}$ DATA $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ DERIVABILE ALLORA È EQUIVALENTE DIRE CHE

1) f È CONVESSA (STRETT.)
2) f' È CRESCENTE (STRETT.)



$\boxed{DIM}$ $(1)\Rightarrow(2)$ (OVVIO DA T. DI VOLTA SCORSA)

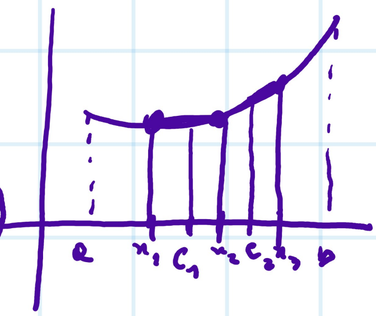
$(2)\Rightarrow(1)$

$(1)\Leftrightarrow\ \forall x_1,x_2,x_3\in(a,b)$ con $x_1<x_2<x_3$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

$\exists c_1\in(x_1,x_2)$ t.c. $f'(c_1)$ $\;=\;$ (primo rapporto)

$\exists c_2\in(x_2,x_3)$ t.c. $f'(c_2)$ $\;=\;$ (secondo rapporto)



QUINDI $x_1 < c_1 < x_2 < c_2 < x_3$

E PERCIÒ $f'(c_1) \le f'(c_2)$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

$\boxed{\text{T.}}$ DATA $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ DERIVABILE 2 VOLTE. ALLORA:

$$\underset{(\square)}{\left(f \text{ CONVESSA}\right)} \iff \underbrace{\left(f''(x)\ge 0 \quad \forall x\in(a,b)\right)}_{(\ast)}$$

$$\underset{(\Delta)}{\left(f \text{ STR. CONVESSA}\right)} \Leftarrow \underset{(O)}{\left(f''(x)>0 \quad \forall x\in(a,b)\right)}$$

$\boxed{\text{DIM}}$

$$(\ast) \overset{\text{T. SU MONOTONIA}}{\iff} \left(f' \text{ CRESC. SU } (a,b)\right) \overset{\text{T. PREC.}}{\iff} (\square)$$

$$(\Delta) \overset{\text{T. PREC}}{\iff} f' \text{ STR. CRE} \Leftarrow (O)$$

$\boxed{\not\Rightarrow}$

CONTROESEMPIO

$f(x)=x^4$

ES. CATTIVO

$$\boxed{\frac{f'(x)}{g'(x)} \to \ell} \Rightarrow \boxed{\frac{f(x)}{g(x)} \to \ell}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\sin x}{2x+\cos x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\cos x}{2-\sin x} = \text{NON ESISTE}$$

$$\frac{2+\frac{\sin x}{x}}{2+\frac{\cos x}{x}}$$

T. DATE $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ t.c. DERIVABILI T.C. PER $x \to a^+$ $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ $(a, a+\delta)$

SUPPONIAMO INOLTRE CHE $g'(x) \neq 0$ SU UN INTORNO DESTRO DI a.

ALLORA $\underbrace{\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}} = \ell$

DIM ESTENDO CON CONTINUITÀ f, g IN a PONENDO $f(a) = g(a) = 0$

SI HA $g(x) \neq 0$ IN $(a, a+\delta)$ PERCHÉ ALTRIMENTI

$$\frac{\overset{0}{g(x)} - \overset{0}{g(a)}}{x-a} = 0$$

$$\parallel$$

$g'(c)$ CON $c \in (a, x) \subset (a, a+\delta)$ (ASSURDO)

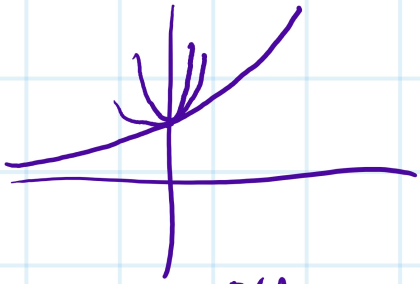
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - \overset{0}{f(a)}}{g(x) - \underset{0}{g(a)}} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} \overset{y=c(x)}{=} \lim_{y\to a^+} \frac{f'(y)}{g'(y)} = \ell$$

PER T. DI CAUCHY $\exists c \in (a, x)$ T.C. $\frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$

$a < c(x) < x$

$x \to a^+ \Rightarrow c(x) \to a^+$ SENZA TOCCARE

ESEMPIO (TAYLOR)



$$e^x - \left(\overbrace{a + bx + cx^2}^{p(x)}\right) = o(x^2)$$

$a = 1$ (PERCHÈ $p(0) = 1$)

$$e^x - (1 + bx + cx^2) \qquad \boxed{p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}}$$

$b = 1$ altrimenti

$$\frac{e^x - 1 - bx - cx^2}{x} = \boxed{\underset{\downarrow 1}{\frac{e^x - 1}{x}} - \underset{\downarrow b}{b} - \underset{\downarrow 0}{cx}} \not\to 0 \quad \text{SE } b \neq 1$$

$c = ?$

$$\frac{e^x - 1 - x - cx^2}{x^2} \overset{?}{\to} 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - cx^2}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - 2cx}{2x} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 2c}{2} = 0$$

$c \iff = \frac{1}{2}$

$$e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) = o(x^2)$$

$$\boxed{e^x} = \boxed{1 + x + \frac{x^2}{2}} + o(x^2)$$

$$\frac{e^x - 1}{x} \to 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\boxed{e^x = 1 + x + o(x)}$$

DEF. DATA $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ DERIVABILE n VOLTE E SIA $x_0 \in (a, b)$

DEFINIAMO

$$T_{(f, x_0)}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

POLINOMIO DI TAYLOR DI ORDINE n DI f CENTRATO IN x_0

ESEMPIO $f(x) = \sin x$ $\quad x_0 = 0 \quad n = 4$

$f'(x) = \cos x$ $\qquad f(0) = 0$

$f''(x) = -\sin x$ $\qquad f'(0) = 1$

$f'''(x) = -\cos x$ $\qquad f''(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = \sin x$ $\qquad f'''(0) = -1$

$f^{(4)}(0) = 0$

$$T(x) = 0 + 1\cdot(x-0) + \frac{0}{2}(x-0)^2 + \frac{(-1)}{6}(x-0)^3 + \frac{0}{24}(x-0)^4 =$$

$$= x - \frac{x^3}{6}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \boxed{o(x^4)}$$

T. (PEANO) $x_0 \in (a,b)$

DATI $n \in \mathbb{N}$ $f \in C^n((a,b))$ E $p(x)$ POLINOMIO DI GRADO $\leq n$.

ALLORA È EQUIVALENTE DIRE CHE:

1) $p(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$

2) $\forall k = 0, \dots, n$ $f^{(k)}(x_0) = p^{(k)}(x_0)$

3) $(f(x) - p(x)) = o((x-x_0)^n)$ PER $x \to x_0$

$\boxed{\text{DIM}}$ $(1) \Rightarrow (2)$

$0 \leq k \leq n$ $\qquad p^{(k)}(x_0) \overset{?}{=} f^{(k)}(x_0)$

$$(k)$$

$$p(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}\cdot(x-x_0)^{k-1}} + \boxed{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k} + \underbrace{\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1} + \dots}$$

$$\left(\frac{f^{m}(x_0)}{m!}\underbrace{(x-x_0)^m}\right)^{(k)} = \underbrace{\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}\cdot m(m-1)\dots(m-k+1)(x-x_0)^{m-k}}$$

x_0

$$\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}\cdot\underbrace{(x-x_0)^n}\right)^{(k)} =$$

$$= \frac{f^{(k)}(x_0)}{\cancel{k!}}\ \cancel{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\ \cancel{(x-x_0)}^0 = f^{(k)}(x_0)$$

$$\left(P(x)\right)^{(k)}_{x=x_0} = 0+0+\ldots+0+\boxed{}+0+0\ldots+0 = f^{(k)}(x_0)$$

$(2)\Rightarrow(3)$ $\qquad P(x)$ SODDISFA (2)

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P(x)}{(x-x_0)^n} = 0\ (?)$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P(x)}{(x-x_0)^n} \overset{H}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-P'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \overset{H}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-P''(x)}{n\cdot(n-1)(x-x_0)^{n-2}} = \ldots$$

$$\ldots \overset{H}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-P^{(n-1)}(x)}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot(x-x_0)^1} \overset{H}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)-P^{(n)}(x)}{n!} =$$

$$= \frac{f^{(n)}(x_0) - P^{(n)}(x_0)}{n!} = \frac{0}{n!} = 0$$

$(3) \Rightarrow (1)$ SICCOME VALE $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ E C'È UN SOLO POLINOMIO CHE SODDISFA (1), ALLORA BASTA MOSTRARE CHE C'È UN SOLO POLINOMIO CHE SODDISFA (3) PER AVERE LA TESI.

$$x^k = (x - x_0 + x_0)^k = ((x - x_0) + x_0)^k$$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$$= b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \dots + b_n(x - x_0)^n$$

$$P_1(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots + b_n(x - x_0)^n$$

$$P_2(x) = \beta_0 + \beta_1(x - x_0) + \dots + \beta_n(x - x_0)^n$$

$$f(x) - P_1(x) = o((x - x_0)^n)$$

PER $x \to x_0$

$$f(x) - P_2(x) = o((x - x_0)^n)$$

$$P_2(x) - P_1(x) = o((x - x_0)^n)$$

$$\|$$

$$(\beta_0 - b_0) + (\beta_1 - b_1)(x - x_0) + \dots + (\beta_n - b_n)(x - x_0)^n$$

$$\left[\frac{\overbrace{(\beta_0 - b_0)} + \overbrace{(\beta_1 - b_1)}(x-x_0) + \dots + (\beta_n - b_n)(x-x_0)^n}{(x-x_0)^n}\right] \to 0$$

$(\beta_i - b_i)$ DEVONO ESSERE TUTTI NULLI ALTRIMENTI, PRESO

$i_0 = \min\{i \mid \beta_i - b_i \neq 0\}$ SI AVREBBE

$$= \frac{(\beta_{i_0} - b_{i_0})(x-x_0)^{i_0} + o(\cancel{(x-x_0)}^{i_0})}{(x-x_0)^n} \to 0$$

ASSURDO

QUINDI IL $P(x)$ CHE SODDISFA (3) È UNICO

QUINDI COINCIDE COL $P(x)$ CHE SODDISFA (1).