Analisi Matematica 1 - 8 Gennaio 2024 - docente: Callegari

Lezione 34: Esercizi per il II esonero

Università di Roma "Tor Vergata" - CdL Matematica

Analisi Matematica 1

docente: Callegari - codocente: Ghezzi

Cognome: .... A.A. 2023-2024

Nome: .... Simula 1 per II Esonero

---

1. Studiare la continuità uniforme e la Lipschitzianità della funzione $f(x) = \sqrt{x} + \frac{\sin x^4}{x}$ sugli insiemi $A = (0, 1]$, $B = [1, 2]$ e $C = [2, +\infty)$.

2. Calcolare $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x) \cdot \sin\left(x + x^2\right) + \sqrt{1 + x^3} - \sqrt{1 - x^4}}{x^2 - \sin x^2}$

3. Trovare max e min assoluti di $f(x) = \tan x + \sin 10\pi x$ sull'insieme $\left[-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{100}, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{100}\right]$.

4. Determinare al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ il limite di (a_n) definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) \\ a_0 = \alpha \end{cases}$$

con $f(x) = \ln(2 + e^x)$ dopodiché, nei casi in cui il limite sia $+\infty$, stabilire con che ordine ci tende.
Fare la stessa cosa anche nel caso $f(x) = \ln(1 + 2e^x)$.

5. Dire se è vera o falsa la seguente affermazione: *se* $f : [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ *è continua su* $[a, +\infty)$ *e derivabile su* $(a, +\infty)$ *allora esiste* $\xi > a$ *tale che* $f'(\xi) = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ Se è vera dimostrarla, se è falsa esibire un controesempio.

$\boxed{1.}$ Studiare la continuità uniforme e la Lipschitzianità della funzione $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{\sin x^4}{x}$ sugli insiemi $A = (0, 1]$, $B = [1, 2]$ e $C = [2, +\infty)$.

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\sqrt{x} + \frac{\sin(x^4)}{x} \right) = \lim_{x \to 0^+} \left(\underset{\downarrow \atop 0}{\sqrt{x}} + \underset{\downarrow \atop 1}{\frac{\sin x^4}{x^4}} \cdot \underset{\downarrow \atop 0}{x^3} \right) = 0$$

$=$

F CONT. SU $[0,1]$ $\Rightarrow$ F U.C. PER H.C. SU $[0,1]$

$\Downarrow$

F U.C. SU $(0,1]$

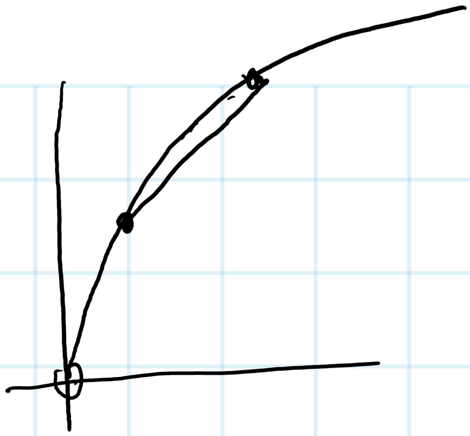
$\uparrow$

f

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(2x) - f(x)}{2x - x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{2x} + \frac{\sin(2x)^4}{2x} - \left(\sqrt{x} + \frac{\sin x^4}{x} \right)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\sqrt{2x} - \sqrt{x}}{x} + \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{\sin(2x)^4}{2x^2}} - \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{\sin x^4}{x^2}} \right) = +\infty$$

$$\frac{\sqrt{2x} - \sqrt{x}}{x} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{x}} \to +\infty$$



$$\boxed{\text{SU } [0,1] \text{ È U.C. MA NON LIP.}}$$

$[1,2]$

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{\sin x^4}{x}$$

BASTA MOSTRARE CHE $f'(x)$ È LIMITATA SU $[1,2]$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\cos x^4 \cdot 4x^3 \cdot x - \sin x^4 \cdot 1}{x^2}$$

$|f'(x)|$ È CONTINUA SU $[1,2]$ QUINDI HA MAX $= M$ PER T. W.

$$\forall x_1, x_2 \in [1,2] \quad \left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| = |f'(c)| \leq M$$

LAGR.

c TRA x_1 E x_2

QUINDI f È LIP. SU $[1,2]$

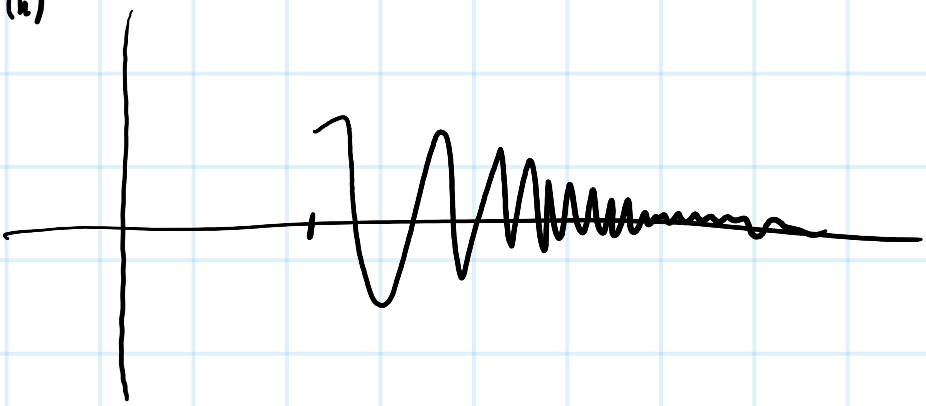
SU $[2,+\infty)$

$$\underbrace{\sqrt{x}}_{g(x)} + \underbrace{\boxed{\frac{\sin x^4}{x}}}_{h(x)}$$

$g(x)=\sqrt{x}$ SU $[2,+\infty)$ È LIP. $\Rightarrow$ U.C.

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ SU $[2,+\infty)$ MAX $g'(x) =$
$= g'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$h(x)$



$h(x) : [2,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA SU $[2,+\infty)$ E CON ASINTOTO PER $x \to +\infty$

$\Downarrow$

$h(x)$ È U.C.

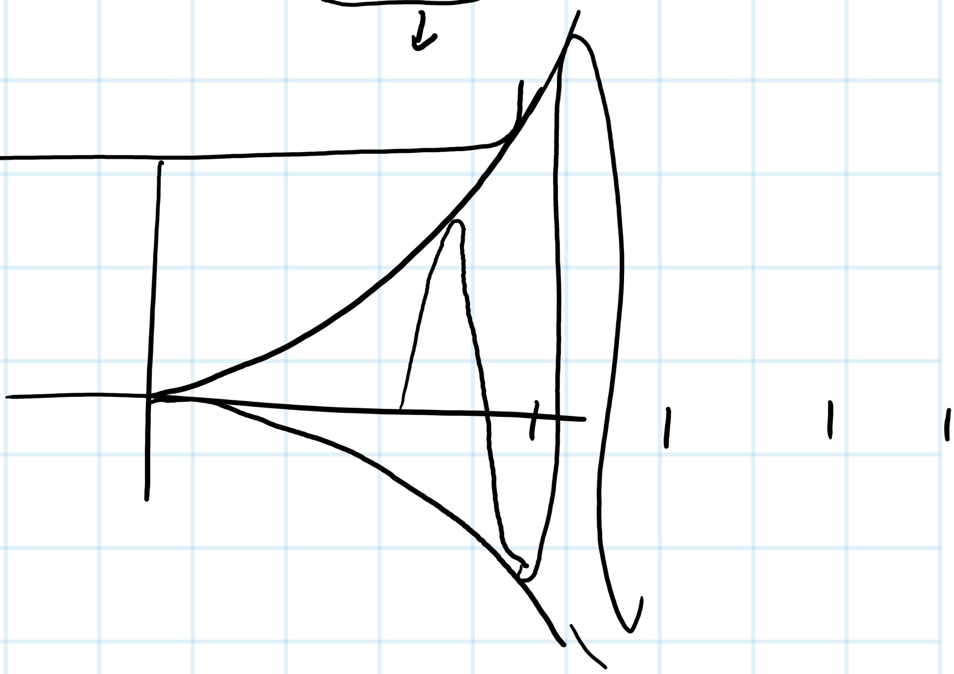
SU $[2,+\infty)$ $\boxed{g(x) \text{ E } h(x) \text{ U.C.} \Rightarrow f(x) = g(x) + h(x) \text{ È U.C.}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\cos x^4 \cdot 4x^3 \cdot x - \sin x^4 \cdot 1}{x^2} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\downarrow\, 0} + \underline{4x^2 \cdot \cos x^4} - \underbrace{\frac{1}{x^2}\sin x^4}_{\downarrow}$$

$x^4 = 2k\pi$

$x_k = \underline{\sqrt[4]{2k\pi}}$



$$f'(x_k) = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x_k}}}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\sqrt[4]{2k\pi}}_{\downarrow\, +\infty} \cdot \underbrace{\cos 2k\pi}_{= 1} - \underbrace{\frac{1}{x_k^2}\sin(x_k)^4}_{\downarrow\, 0}$$

$k \to +\infty \quad f'(x_k) \to +\infty$

(?) $\forall M > 0 \ \exists^{\text{no}} x_1, x_2 \in [2, +\infty)$ t.c. $\left|\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right| > M$

$\forall M > 0$ PRENDO k t.c. $f'(x_k) > M+1$

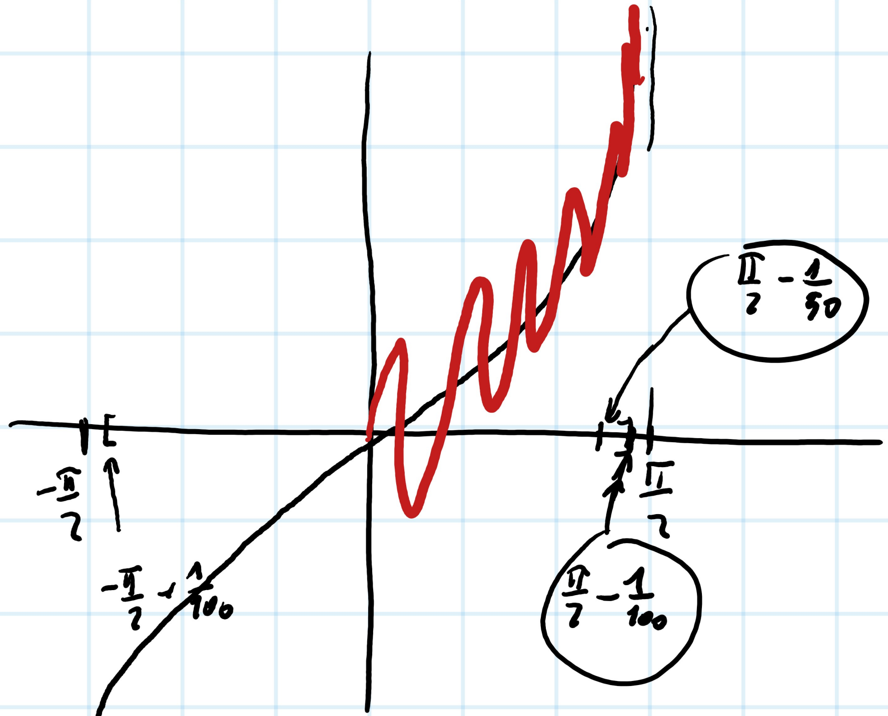
POI PRENDO x t.c. $\dfrac{f(x_k) - f(x)}{x_k - x} > M$

POSSO FARLO PERCHÈ $\lim\limits_{x \to x_k} \dfrac{f(x) - f(x_k)}{x - x_k} = f'(x_k) > M+1$

QUINDI VALE

CIOÈ f NON È LIP.

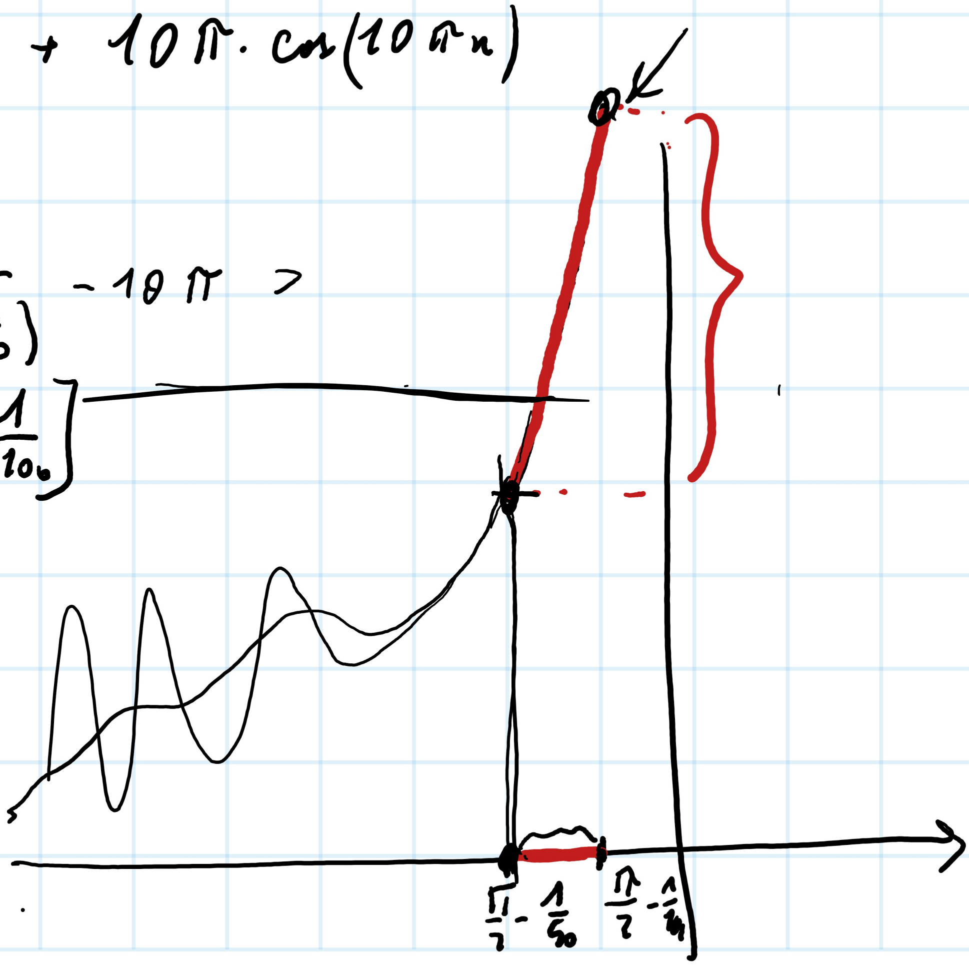
3. Trovare max e min assoluti di $f(x) = \tan x + \sin 10\pi x$ sull'insieme $\left[-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{100}, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{100}\right]$.



$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + 10\pi \cdot \cos(10\pi x)$$

$$f'(x) \geq \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{50}\right)} - 10\pi >$$

$$x \in \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{50}, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{100}\right]$$



$$\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{100}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{50}\right) = \frac{1}{100}$$

$$\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{50}\right)} - 10\pi =$$

$$= \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{50}} - 10\pi > \frac{1}{\left(\frac{1}{50}\right)^2} - 10\pi >$$

$$0 < \xi < x$$

$$\sin x = \cancel{x - \frac{x^3}{6} + \boxed{\frac{\sin \xi}{24} \cdot x^4} > x - \frac{x^3}{6}}$$

$$\cancel{\left(\frac{1}{50} - \frac{1}{50^3 \cdot 6}\right)^2 < \left(\sin \frac{1}{50}\right)^2 < \left(\frac{1}{50}\right)^2}$$

$$\left(\frac{1}{50}\right)^2 > \left(\sin \frac{1}{50}\right)^2$$

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{50}\right)^2} < \frac{1}{\left(\sin \frac{1}{50}\right)^2}$$

$$\frac{1}{\left(\ldots \right)^2} \overset{\alpha}{>} \frac{1}{\left(\sin \frac{1}{50}\right)^2} > \frac{1}{\left(\frac{1}{50}\right)^2}$$

$$> 2500 - 40 > \boxed{2000}$$

DUNQUE SO CHE SU $\left[\overbrace{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{50}}^{\beta}, \overbrace{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{100}}^{\alpha}\right]$, CHE MISURA $\frac{1}{100}$,

$f'(x) > 2000$ QUINDI

$$f(\alpha) - f(\beta) > 2000 \cdot \frac{1}{100} = 20$$

SE PER ASSURDO FOSSE

$$f(\alpha) - f(\beta) \leq 20$$

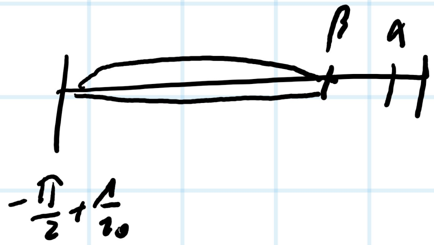
allora

$$\frac{f(a) - f(b)}{\frac{1}{100}} \leq 2000$$

QUINDI PER LAGRANGE AVREI UN PUNTO c DOVE

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{\frac{1}{100}} \leq 2000$$

ORA $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{10}, \beta\right]$



SI HA

$$f(x) = \tan x + \sin 10^5 x < \tan\beta + 1 < f(\beta) + 1 + 1 =$$

$$= \boxed{f(\beta) + 2}$$

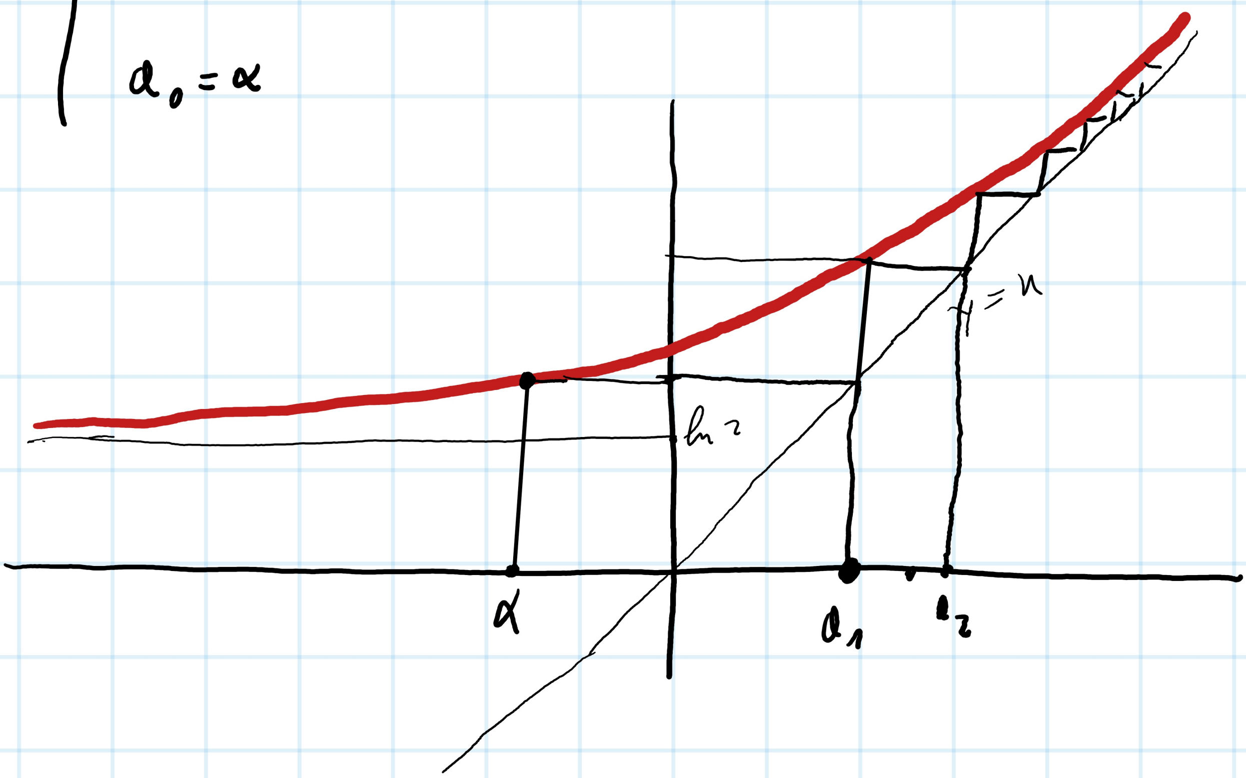
$$f(\alpha) > f(\beta) + 20 = \left(f(\beta) + 2\right) + 18 > f(x) + 18$$

4. Determinare al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ il limite di (a_n) definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) \\ a_0 = \alpha \end{cases}$$

con $f(x) = \ln(2 + e^x)$ dopodiché, nei casi in cui il limite sia $+\infty$, stabilire con che ordine ci tende.
Fare la stessa cosa anche nel caso $f(x) = \ln(1 + 2e^x)$.

$$\begin{cases} a_{n+1} = \ln\left(2 + e^{a_n}\right) \\ a_0 = \alpha \end{cases}$$



$$\ln(2 + e^x) - x = \ln\left(e^x \cdot \left(\frac{2}{e^x} + 1\right)\right) - x$$

$$= \cancel{\ln e^x} + \ln\left(1 + \frac{2}{e^x}\right) \cancel{-x}$$

$$= \ln\left(1 + \frac{2}{e^x}\right) \to 0$$

PRENDO $A = \mathbb{R}$ $\quad f(A) \subset A$

SU A $\rightarrow$ 1) $f(x)$ È CRESCENTE
$\rightarrow$ 2) $f(x) > x$

$\Big\} \Rightarrow (a_n)$ MONOTONA CRESCENTE

$$c_n < a_n < b_n$$

$$\boxed{c_n = \ln n} \qquad b_{n+1} = \ln(n+1)$$

$$f(c_n) = \ln\left(2 + e^{\ln n}\right) = \ln(n+2) = c_{n+2} > c_{n+1}$$

$(b_{n+2}$

$$\boxed{c_{n+1} < f(c_n)}$$

$$n+1 > \frac{n}{4} + 2$$

$$\frac{3}{4} n > 1$$

$$n > \frac{4}{3}$$

$$\boxed{c_n < a_n}$$

$$c_{n+1} < f(c_n) < f(a_n) = a_{n+1}$$

$$\boxed{b_n = \ln \frac{n}{4}} \qquad f(b_n) = \ln\left(2 + e^{\ln \frac{n}{4}}\right) =$$

$$= \ln\left(2 + \frac{n}{4}\right) < \ln\left(\overline{n+1}\right) = b_{n+1}$$

$$\boxed{b_{n+1} > h(b_n)}$$

$$b_n > a_n$$

$$b_{n+1} > f(b_n) > f(a_n) = a_{n+1}$$

$$c_{n-1} < a_n < b_{n+3} \Rightarrow c_n < a_{n+1} < b_{n+4}$$

$$c_n = \boxed{\ln n}$$

$$b_n = \ln \frac{n}{4} = \boxed{\ln n - \ln 4}$$

$$\ln \frac{n}{4}$$

$$c_{n_0 - \square} < a_{n_0} < b_{n_0 + \square}$$

$$n = 27$$

$$\ln n > \ln e^3$$

$$c_{n+2} = \boxed{\ln(n+2)}$$

$$b_{n+108} = \boxed{\ln\left(\frac{n+108}{4}\right)}$$

$$a_4 = 3$$

$$\boxed{c_{n+2} < a_{n+4} < b_{n+108}}$$

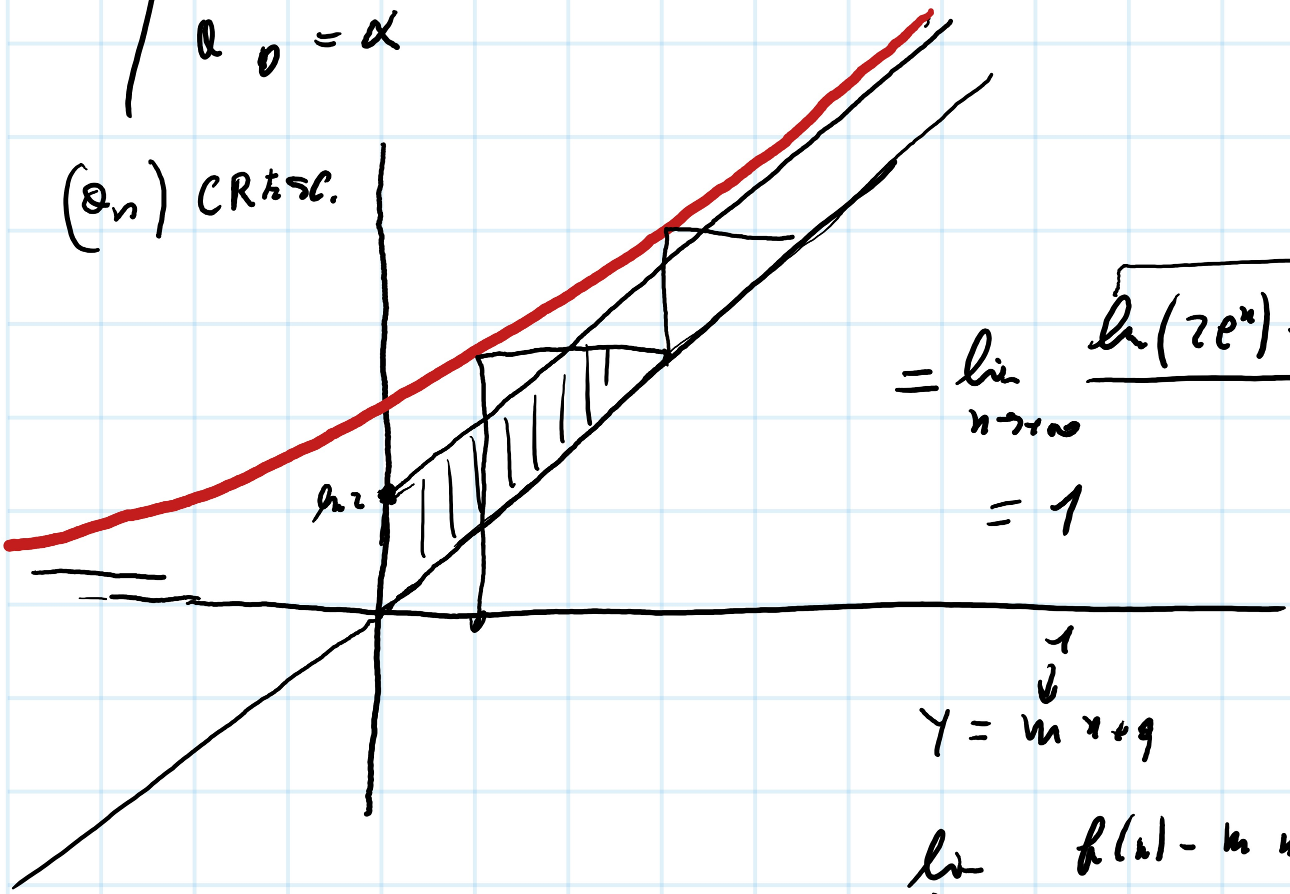
$$c_2 = \ln 2$$

$$\boxed{c_2 < a_4 < b_{108}}$$

$f(x) = \ln(1+2e^x)$

$$\begin{cases} a_{n+1} = \ln(1+2e^{a_n}) \\ a_0 = \alpha \end{cases}$$

(a_n) CRESC.



$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+2e^x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2e^x) + \ln\left(1+\frac{1}{2e^x}\right)}{x} = 1$$

$$y = \overset{\overset{1}{\downarrow}}{m}x + q$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \ln(1+2e^x) - x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\cancel{\ln e^x} + \ln 2 + \underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{2e^x}\right)}_{\downarrow\, 0} \cancel{-x} \right) = \ln 2$$

$$\overset{b_n}{n+\alpha} < a_n < \overset{c_n}{n+\beta}$$

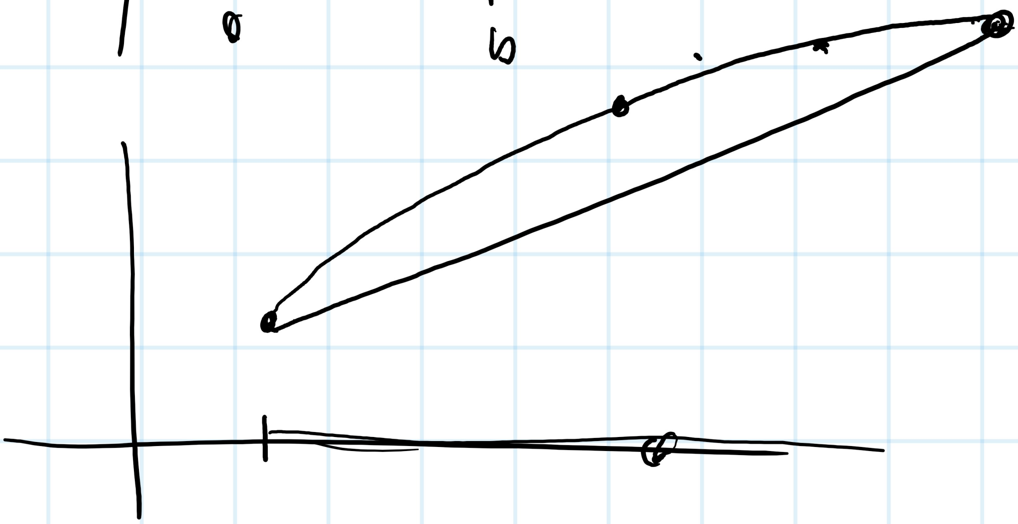
$$b_{n+1} < a_{n+1} < c_{n+1}$$

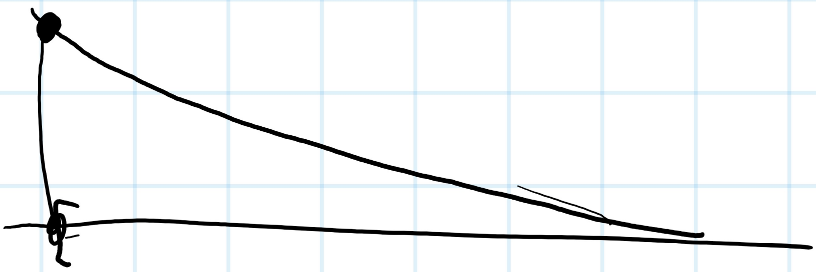
5. Dire se è vera o falsa la seguente affermazione: *se* $f : [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ *è continua su* $[a, +\infty)$ *e derivabile su* $(a, +\infty)$ *allora esiste* $\xi > a$ *tale che* $f'(\xi) = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ Se è vera dimostrarla, se è falsa esibire un controesempio.

FALSA

CONTROESEMPIO

e^{-x} su $[0, +\infty)$





$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \to 0 \quad (x \to +\infty)$$