Analisi Matematica 1 - 10 Gennaio 2024 - docente: Callegari

Lezione 35: Esercizi per il II esonero

Università di Roma "Tor Vergata" - CdL Matematica

Analisi Matematica 1

docente: Callegari - codocente: Ghezzi

Cognome: .... A.A. 2023-2024

Nome: .... Simula 2 per II Esonero

---

1. Studiare la continuità uniforme e la Lipschitzianità della funzione $f(x) = \ln\left(2 + x^2 + \sin x^4\right)$ sugli insiemi $A = (-2, 2)$ e $B = (-2, +\infty)$.

2. Calcolare $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - \frac{2}{\cos x} - \frac{x^2}{3} \cdot \ln\left(1 - x^2\right) + x\left(\tan x^2 - \sin x^2\right)}{e^{x^7} - \cos x^4}$

3. Risolvere la disequazione $e^{x^2} \leq 1 + \arctan x^2$ ricorrendo, se necessario, ad uno studio di funzione.

4. Determinare al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ il limite di (a_n) definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_{n+1} = f\left(a_n\right) \\ a_0 = \alpha \end{cases}$$

con $f(x) = x + \frac{\pi}{4} - \arctan x$.

5. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivabile e siano (a_n) e (b_n) due successioni a valori in $\mathbf{R}$. dire se sono vere o false le affermazioni che seguono, dimostrandole se vere ed esibendo un controesempio se false.

(**a**) Se $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e $a_n \to 0$ allora $\dfrac{f\left(a_n\right) - f\left(-a_n\right)}{2a_n} \to f'(0)$.

(**b**) Se $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e $a_n \to 0$ allora $\dfrac{f\left(2a_n\right) - f\left(a_n\right)}{a_n} \to f'(0)$.

(**c**) Se $a_n \neq b_n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, $a_n \to x_0$ e $b_n \to x_0$ allora $\dfrac{f\left(b_n\right) - f\left(a_n\right)}{b_n - a_n} \to f'\left(x_0\right)$.

(**d**) Come **(c)** ma aggiungendo l'ipotesi che f sia di classe C^1.

1. Studiare la continuità uniforme e la Lipschitzianità della funzione $f(x) = \ln\left(2 + x^2 + \sin x^4\right)$ sugli insiemi $A = (-2, 2)$ e $B = (-2, +\infty)$.

$$f'(x) = \boxed{\frac{2x + 4x^3 \cos x^4}{2 + x^2 + \sin x^4}}$$

$M = \max\limits_{x \in [-2,2]} f'(x)$ SU $(-2,2)$ f' È LIMITATA $\Rightarrow$ Rapp. incr. tutti limitati

$\Downarrow$

LIP.

$x^4 = 2n\pi$

$x = \sqrt[4]{2n\pi}$

$$\boxed{a_n = \sqrt[4]{2n\pi}}$$

$f'(a_n) \to +\infty$?

$$\frac{2\sqrt[4]{2n\pi} + 4\sqrt[4]{(2n\pi)^3} \cdot \overbrace{\cos 2n\pi}^{1}}{2 + \sqrt[4]{(2n\pi)^2} + \underbrace{\sin 2n\pi}_{0}} \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$$

$\forall M > 0 \quad \exists \bar{x} \in (-2, +\infty)$ t.c. $f'(\bar{x}) > M$

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = f'(\bar{x}) > M$$

$$f(x) = \ln\left(2 + x^2 + \sin x^4\right) =$$

$$= \ln\left(\left(2 + x^2\right) \cdot \left(1 + \frac{\sin x^4}{2 + x^2}\right)\right) =$$

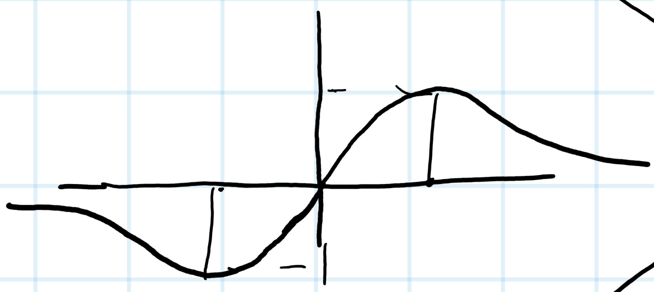
U.C.

$$= \underbrace{\ln\left(2 + x^2\right)}_{\text{Lip.}} + \underbrace{\ln\left(1 + \frac{\sin x^4}{2 + x^2}\right)}_{\to 0}$$

$\frac{\sin x^4}{2 + x^2} \to 0$ $(x \to +\infty)$

$$\left(\ln(2+x^2)\right)' = \frac{2x}{2+x^2}$$

$$|2ab| \le a^2+b^2$$



$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot x}{(\sqrt{2})^2+(x)^2} \le \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2. Calcolare $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{e^x+e^{-x}-\frac{2}{\cos x}}-\frac{x^2}{3}\cdot\ln\left(1-x^2\right)+\overbrace{x\left(\tan x^2-\sin x^2\right)}}{e^{x^7}-\cos x^4}$

$$e^{x^7}-\cos x^4 = \cancel{1}+x^7+o(x^{14})-\left(\cancel{1}+o(x^8)\right) =$$

$$= \boxed{x^7}+o(x^8)$$

$$x\left(\tan x^2-\sin x^2\right)=\left(\frac{(x^2)^3}{2}+o(x^6)\right)x = \frac{1}{2}x^7+o(x^7)$$

$$\frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-(1-\cos x)} =$$

$$= 1+(1-\cos x)+(1-\cos x)^2+(1-\cos x)^3+o(x^8) =$$

$$= \boxed{1}+\left(\cancel{1}-\cancel{1}+\boxed{\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}+o(x^8)}\right)+\underbrace{\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^6)\right)^2}+$$

$$+\underbrace{\left(\frac{x^2}{2}+o(x^4)\right)^3}+o(x^8) =$$

$$= \boxed{} + \underbrace{\frac{x^4}{4}+o(x^8)-\frac{x^6}{24}}+\frac{x^6}{8}+o(x^8) = \underbrace{1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+o(x^8)}$$

$$-\frac{2}{\cos x} = -2-x^2-\frac{5}{12}x^4-\frac{61}{360}x^6+o(x^8)$$

$$\underline{e^x+e^{-x}} = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^7}{5040}+o(x^8)$$

$$= 2+x^2+\frac{x^4}{12}+\frac{x^6}{360}+o(x^8)$$

$$-\frac{x^2}{3}\cdot \ln(1-x^2) = -\frac{x^2}{3}\left(-x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^6)\right) =$$

$$= \frac{x^4}{3}+\frac{x^6}{6}+o(x^8)$$

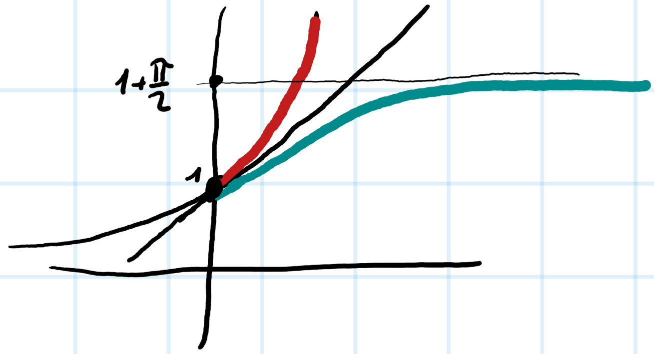
$$\text{NUM} = \cancel{1}+\cancel{x^2}+\cancel{\frac{x^4}{12}}+\cancel{\frac{x^6}{360}}+o(x^8)-\cancel{1}-\cancel{x^2}-\cancel{\frac{5}{12}x^4}-\cancel{\frac{61}{360}x^6}+o(x^8)+\cancel{\frac{x^4}{3}}+\cancel{\frac{x^6}{6}}+o(x^8)$$

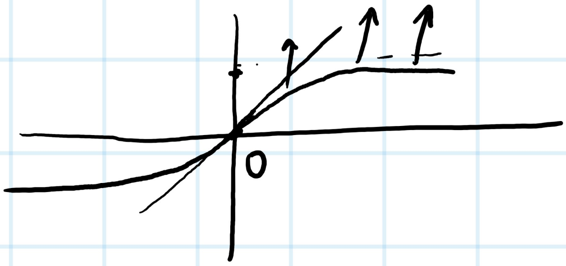
$$+\frac{1}{2}x^7+o(x^7) = \frac{1}{2}x^7+o(x^7) \approx \frac{1}{2}x^7$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^7}{x^7} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{3.}$ Risolvere la disequazione $e^{x^2} \leq 1 + \arctan x^2$ ricorrendo, se necessario, ad uno studio di funzione.

$\boxed{t \geq 0}$ $\underline{e^t} \leq \underline{1 + \arctan t}$ (solo $t=0$



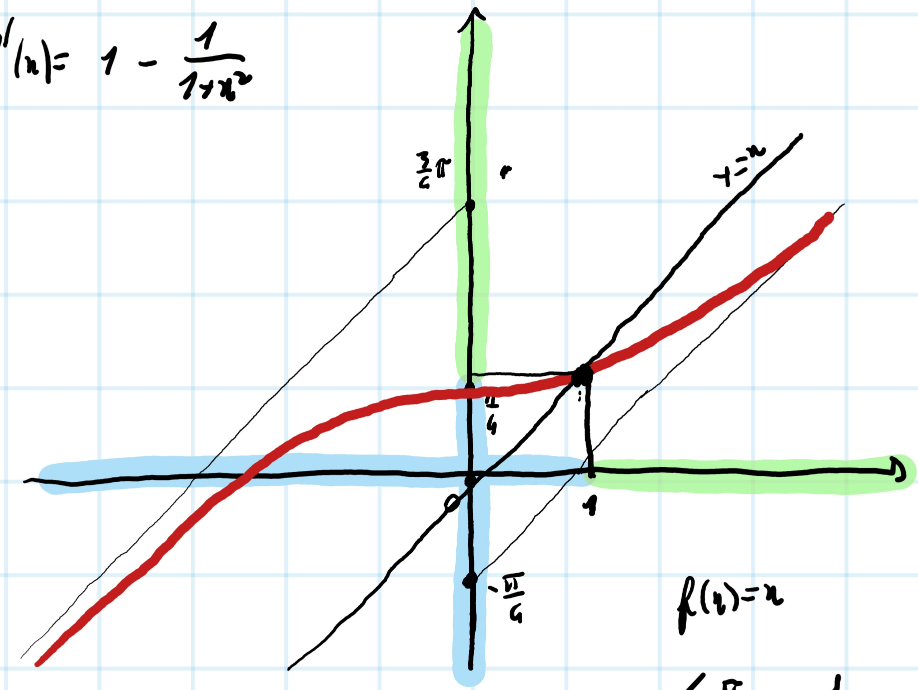


4. Determinare al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ il limite di (a_n) definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) \\ a_0 = \alpha \end{cases}$$

con $f(x) = \underbrace{x + \frac{\pi}{4} - \arctan x}$.

$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}$



$A = (-\infty, 1]$

$B = (1, +\infty)$

$f(A) = A$ 1) $f(x)$ CR. 2) $f(x) > x$ $\Big\} \Rightarrow a_n$ CR. $a_n \to 1$

$f(B) = B$ 1) $f(x)$ CR. 2) $f(x) < x$ $\Big\} \Rightarrow a_n$ dec. $a_n \to 1$

$f(x) = x$

$\cancel{x} + \frac{\pi}{4} - \arctan x = \cancel{x}$

$x = 1$

5. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivabile e siano (a_n) e (b_n) due successioni a valori in $\mathbf{R}$. dire se sono vere o false le affermazioni che seguono, dimostrandole se vere ed esibendo un controesempio se false.

(a) Se $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e $a_n \to 0$ allora $\dfrac{f(a_n) - f(-a_n)}{2a_n} \to f'(0)$.

(b) Se $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e $a_n \to 0$ allora $\dfrac{f(2a_n) - f(a_n)}{a_n} \to f'(0)$.

(c) Se $a_n \neq b_n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, $a_n \to x_0$ e $b_n \to x_0$ allora $\dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \to f'(x_0)$.

(d) Come **(c)** ma aggiungendo l'ipotesi che f sia di classe C^1.

$=$ c_n tra a_n e b_n t.c. $\boxed{f'(c_n)}$

$(a_n \to 0)$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(a_n)-f(0)}{a_n-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$$

$a_n \to 0$

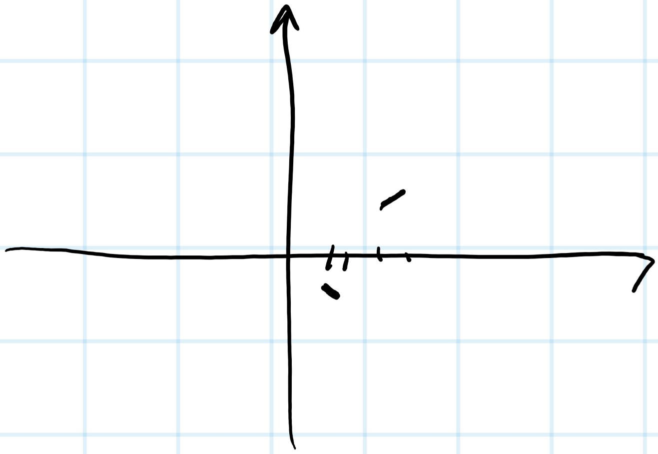
$$\frac{f(a_n)-f(-a_n)}{2a_n}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)+f(0)-f(-x)}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\frac{f(x)-f(0)}{x}}_{\downarrow\, f'(0)}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\underbrace{\frac{f(-x)-f(0)}{(-x)-0}}_{\downarrow\, f'(0)}\right) = f'(0)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(0)+f(0)-f(x)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\underbrace{2\,\frac{f(2x)-f(0)}{2x-0}}_{\downarrow\; 2f'(0)} - \underbrace{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}_{f'(0)} \right) = f'(0)$$



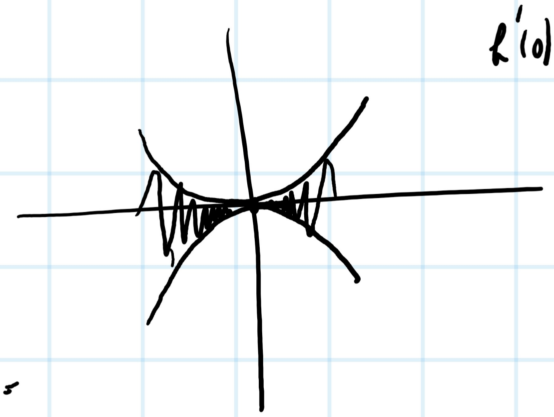
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad x \neq 0$$

$$= \boxed{2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}} \quad x \neq 0$$

$f'(0)=0$

$f'(0) = 0$



$$a_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \to 0$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi n - \frac{\pi}{2}} \to 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-0}{x-0} =$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-0}{x-0}$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{-\frac{x^2}{x}} \le \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{f(x)}{x}} \le \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{x^2}{x}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(a_n)-f(b_n)}{a_n-b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n^2 \overbrace{\sin\frac{1}{a_n}}^{1} - b_n^2 \overbrace{\sin\frac{1}{b_n}}^{-1}}{a_n-b_n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n^2+b_n^2}{a_n-b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{2\pi n-\frac{\pi}{2}}\right)^2}{\frac{-\pi}{\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)\left(2\pi n-\frac{\pi}{2}\right)}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(2\pi n-\frac{\pi}{2}\right)^2} \right) \cdot \frac{\overbrace{4\pi^2 n^2 - \frac{\pi^2}{2}}}{-\pi} = -\frac{1}{2\pi} \neq f'(0)$$