Analisi Matematica 1 - 17 Ottobre 2024 - docente: Callegari

Lezione 12: Massimo Limite e Minimo Limite

INDICE

1) SUCCESSIONI DI CAUCHY
   - A) DEFINIZIONE
   - B) EQUIVALENZA IN $\mathbb{R}$ CON SUCC. CONVERGENTI

2) LIMINF E LIMSUP
   - A) DEFINIZIONI
   - B) CARATTERIZZAZIONI EQUIVALENTI
   - C) RELAZ. CON ESISTENZA LIMITE
   - D) ESEMPI

$\sqrt{n} \sin\sqrt{n}$

$(\sqrt{n}-[\sqrt{n}])^{\sqrt{n}}$

$\sqrt{n}\,(\sin\sqrt{n})^2$

PROSSIMA VOLTA

SUCC. DI CAUCHY

DEF DATA (a_n) DIREMO CHE (a_n) È DI CAUCHY (FONDAMENTALE) SE
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n, m \geq n_0 \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$

LEMMA DATA (a_n) SE (a_n) È DI CAUCHY ALLORA È LIMITATA.

DIM PRENDO $\varepsilon = 1$, SICCOME (a_n) È DI CAUCHY

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad n, m \geq n_0 \quad |a_n - a_m| < 1$$

IN PARTICOLARE $\quad |a_n - a_{n_0}| < 1 \quad$ OVVERO

$$a_{n_0} - 1 < a_n < a_{n_0} + 1$$

$[a_{n_0} - 1, a_{n_0} + 1] = I$

$a_n \in I \quad \forall n \geq n_0$

SIA $M > 0$ t.c.

$$\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0 - 1}\} \subset [-M, M]$$

QUINDI $\quad \{a_n\} \subset [-M, M] \cup I \subset$ INTERVALLO LIMITATO.

TEO. DATA (a_n) È EQUIV. DIRE CHE:

1) (a_n) È DI CAUCHY

2) $a_n \to l \in \mathbb{R}$