Analisi Matematica 1 - 18 Ottobre 2024 - docente: Callegari

Lezione 13: Massimo Limite e Minimo Limite II

INDICE

1) EQUIVALENZA TRA 4 DEF. LIMINF/LIMSUP
2) RELAZIONE TRA lim, liminf, limsup
3) ~~liminf $(a_n + b_n)$ limsup $(a_n + b_n)$~~
4) ESEMPI

DATA (a_n) LIMITATA

SIANO

$L_1 \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall \varepsilon > 0 \quad L_1 - \varepsilon \overset{\text{FREQ}}{<} a_n \overset{\text{DEF.}}{<} L_1 + \varepsilon$

$L_2 = \text{INF}\underbrace{\{x \in \mathbb{R} \mid \text{DEF IN } n \ \ a_n \le x\}}_{\mathcal{M}} = \text{INF}(\mathcal{M})$

$L_3 = \text{SUP}\underbrace{\{\ell \in \mathbb{R} \mid a_{n_k} \to \ell\}}_{\mathcal{I}} = \text{SUP}(\mathcal{I})$

$L_4 = \lim_{n \to +\infty} \Big(\overbrace{\sup_{k \ge n} a_k}^{A_n} \Big)$

ALLORA $L_1 = L_2 = L_3 = L_4$

$\boxed{\text{DIM}}$

$\boxed{L_1 = L_2}$ POICHÉ $\forall \varepsilon > 0 \quad L_1 + \varepsilon \overset{\text{DEF. IN } n}{>} a_n$ ALLORA $\forall \varepsilon > 0 \quad L_1 + \varepsilon \in \mathcal{M}$

MA ALLORA $L_2 \le L_1 + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$ QUINDI $\boxed{L_2 \le L_1}$

MA NON PUÒ ESSERE $L_2 < L_1$ ALTRIMENTI $\exists \varepsilon > 0$ t.c.

$L_2 < L_1 - \varepsilon$ QUINDI $L_1 - \varepsilon$ È MAGGIORANTE DEFINITIVO (ASSURDO PERCHÉ FREQ IN n $L_1 - \varepsilon < a_n$.

$\boxed{L_2 = L_4}$ $\quad L_2 = \text{INF.}\,\mathcal{M}$

$L_4 = \text{INF}\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ DOVE $\left(A_n = \sup_{k \ge n} a_k\right.$

PERCHÉ $A_{n+1} = \text{SUP}\{a_k \mid k \ge n+1\} \le \text{SUP}\{a_k \mid k \ge n\} = A_n$

E DUNQUE

$L_4 = \lim_{n \to +\infty} A_n = \inf\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$