

www.problemisvolti.it

Analisi Matematica 1

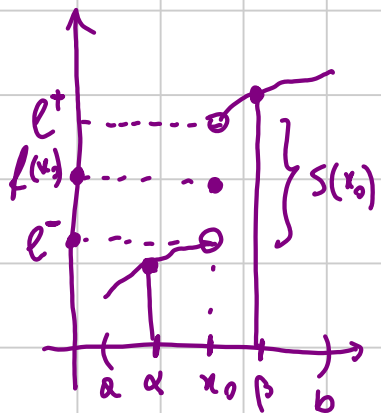
lezioni on-line

Discontinuità di una Funzione Monotona

TEOREMA SE $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ È MONOTONA ALLORA LE SUE DISCONTINUITÀ POSSONO ESSERE SOLO DI TIPO SALTO E SONO AL PIÙ UNA QUANTITÀ NUMERABILE.

DIMOSTRAZIONE (f è crescente e (a, b) limitato)

I° Passo



$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup_{x \in (a, x_0)} f(x) = l^- \leq f(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf_{x \in (x_0, b)} f(x) = l^+ \geq f(x_0)$$

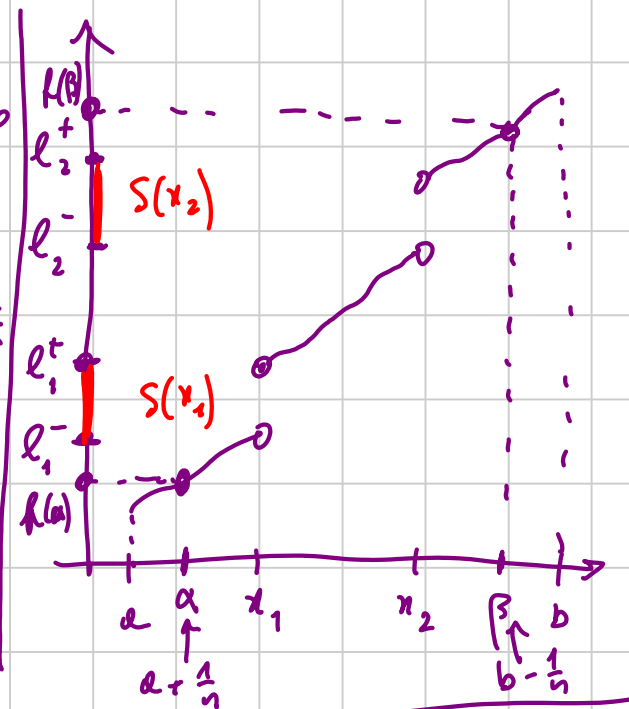
\Downarrow
 x_0 è di salto

II° Passo

$$a < \alpha < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \beta < b$$

con x_1, x_2, \dots, x_n p.t. di disc.

$$S(x_1) + S(x_2) + \dots + S(x_n) \leq f(\beta) - f(\alpha)$$



III° Passo

$$A_n = \left\{ x \in (a, b) \mid S(x) \geq \frac{1}{n} \text{ e } x \in \left(a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n} \right) \right\}$$

$$\#A_n \leq \frac{f(b - \frac{1}{n}) - f(a + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \text{numero finito}$$

$$A = \left\{ x \in (a, b) \mid f \text{ ha salto in } x \right\} = \bigcup_n A_n \text{ è al più numerabile}$$