Metodi Matematici - Ex. 1

Titolo nota

3 ottobre 2017 (8:30-9.15) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

ES.2 LISTA 1

$$X = \mathbb{R}^2 \qquad d\big((x,y),(x',y')\big) =$$

$$= \begin{cases} \text{distanza euclidea se questa è } \le 1 \\ 1 \quad \text{altrimenti} \end{cases}$$

d è distanza: 1) $d(P,Q) \geq 0$ con "$=$" che vale solo per $P=Q$

2) $d(P,Q) = d(Q,P)$

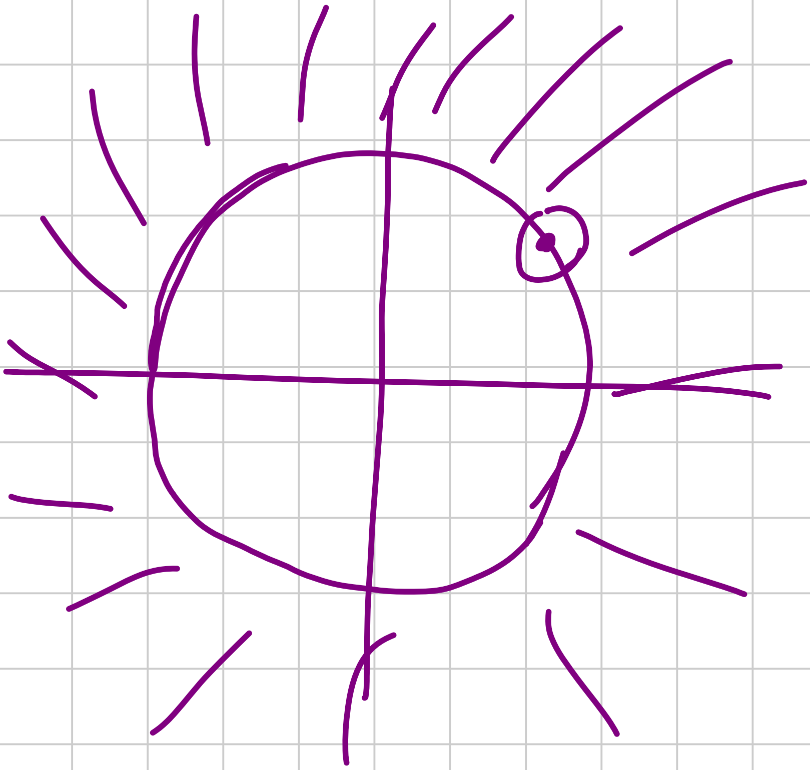
3) $d(P,Q) + d(Q,R) \geq d(P,R)$

$$B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d\big((x,y),(0,0)\big) < 1\} =$$ PALLA APERTA STANDARD CON NORMA EUCLIDEA

$$B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d\big((x,y),(0,0)\big) \leq 1\} = \mathbb{R}^2$$

QUINDI $\partial B_1 \neq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d\big((x,y),(0,0)\big) = 1\}$

FIGURA



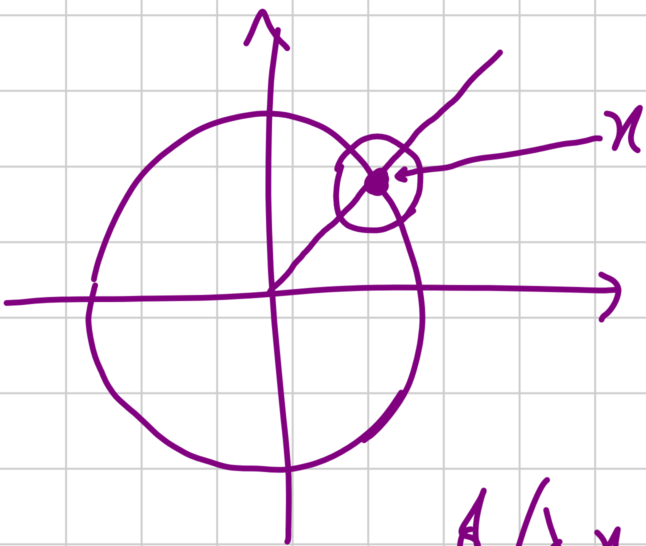
ES. 3
LISTA 1

Se una distanza d su X deriva da una norma, allora

$$\partial(B_1(0)) = \{x \in X \mid d(x, \bar{0}) = 1\}$$

$\|\lambda x\| =$

$= |\lambda| \cdot \|x\|$



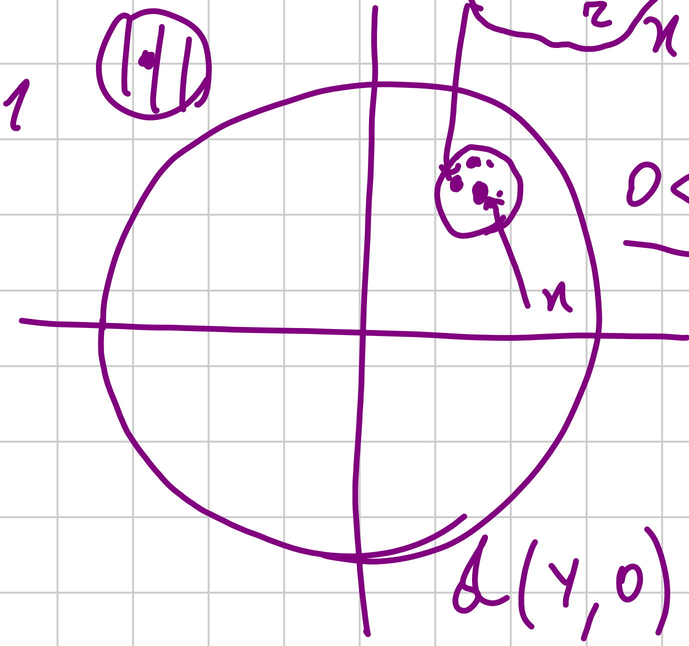
λx

$\lambda \in \mathbb{R}^+$

$$d(\lambda x, 0) = \lambda\, d(x, 0) = \lambda$$

Analogamente se $d(x,0) > 1$ esiste tutto un intorno con $d > 1$

$|y||$



$y \in I_r(x)$

x t.c. $d(x,0) = \delta < 1$

$0 < r < (1-\delta)$

$d(y,0) \leq d(y,x) + d(x,0) <$

$< r + \delta < 1$

ES. 10 LISTA 1

$$\ell^1 = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \;\middle|\; \text{t.c.} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < +\infty \right\}$$

$$\boxed{\mathbb{R}^n \qquad \|\bar{x}\|_1 = |a_1| + |a_2| \cdots + |a_n| \qquad x = (a_1, \ldots, a_n)}$$

$(a_n), (b_n)$

$$\|(a_n)\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$$

$$d((a_n),(b_n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n - b_n|$$

1) ℓ_1 è sp. vettoriale? $\boxed{SI}$

2) $\| \ \|_{\ell_1}$ è norma

A) $\underbrace{\|(a_n)\|_{\ell 1}}_{\displaystyle \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|} \geq 0$ con "=" che vale solo se (a_n) = ident. nulla

$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \geq 0$ SI

"=" $\iff$ $a_i = 0$ $\forall i$

B) $\|\lambda \cdot (a_n)\|_{\ell^2} = |\lambda| \cdot \|(a_n)\|_{\ell^1}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{|\lambda a_n|}_{|\lambda| \cdot |a_n|} = |\lambda| \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$$

C) $\|(a_n) + (b_n)\|_1 \leq \|(a_n)\|_1 + \|(b_n)\|_1$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n + b_n| \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| + \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|$$

$$\leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| + |b_n| =$$

3) $\boxed{\|\cdot\|_{\ell_1} \text{ è completa}}$

Data (X_n) successione in ℓ^1 dobbiamo mostrare che se (X_n) è di Cauchy allora $\exists X \in \ell^1$ t.c. $X_n \xrightarrow{\ell^1} X$.

$$X_1 = \left(a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots, a_k^{(1)}, \ldots\right)$$

$$X_2 = \left(a_0^{(2)}, a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \ldots, a_k^{(2)}, \ldots\right)$$

$$\vdots$$

$$X_n = \left(a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_k^{(n)}, \ldots\right)$$

$$\vdots$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $n, m \geq n_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\|X_n - X_m\|_{\ell_1} \leq \varepsilon}_{\uparrow}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \left| a_k^{(n)} - a_k^{(m)} \right| \leq \varepsilon}$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $n, m \geq n_0 \ \forall k \in \mathbb{N}$

$$\left| a_k^{(n)} - a_k^{(m)} \right| \leq \varepsilon$$

Quindi, per ogni $k \in \mathbb{N}$, la succ.

$\left(a_k^{(n)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy

di conseguenza $\left(a_k^{(n)} \right)$ converge a un numero

che indichiamo con a_k

La successione $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è la candidata X.

Devo mostrare che $X_n \xrightarrow{\ell_1} X$

Ma prima devo vedere che $X \in \ell_1$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_k| < +\infty$$

Osserviamo che $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (che è di Cauchy)

è anche limitata perché

$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}$ t.c. $n,m\geq n_0\ \|X_n-X_m\|\leq\varepsilon$

$\varepsilon=1$

ma allora se $n\geq n_0$ si ha

$$\|X_n\| = \|X_n - X_{n_0} + X_{n_0}\| \leq$$

$$\leq \|X_n - X_{n_0}\| + \|X_{n_0}\| \leq$$

$$\leq \underbrace{\varepsilon}_{\varepsilon=1} + \underbrace{\|X_{n_0}\|} \leq M$$

Mostriamo che $\sum_{k=0}^{+\infty}|a_k| < M \leftarrow$ [costante t.c. $\|X_n\|\leq M$ $\forall n\in\mathbb{N}$

A tale scopo basta mostrare che

$$\forall N\in\mathbb{N}\quad \sum_{k=0}^{N}|a_k| < M$$

Siccome $\forall k\in\mathbb{N}$ $(a_k^{(n)}) \xrightarrow{n\to+\infty} (a_k)$ allora $\forall\varepsilon>0$

prendo n_0 t.c. $\forall n\geq n_0$ $|a_k^n - a_k| < \frac{\varepsilon}{N}$ e ovvi che

$$\forall n\geq n_0 \quad \sum_{k=0}^{N}|a_k^n - a_k| < \sum_{k=0}^{N}\frac{\varepsilon}{N} = \varepsilon$$

Quindi $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} |a_k| = \sum_{k=0}^{N} \left| a_k - a_k^{(n)} + a_k^{(n)} \right| \leq$

$$\leq \underbrace{\sum_{k=0}^{N} \left| a_k - a_k^{(n)} \right|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{\sum_{k=0}^{N} \left| a_k^{(n)} \right|}_{\leq M}$$

Quindi $\forall N \in \mathbb{N}\ \forall \varepsilon > 0\ \displaystyle\sum_{k=0}^{N} |a_k| \leq M + \varepsilon$

Quindi $\forall N \in \mathbb{N}\ \displaystyle\sum_{k=0}^{N} |a_k| \leq M$

Quindi $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \leq M$

$$\underbrace{\text{Quindi } X = (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^1}$$

RESTA DA DIMOSTRARE $\boxed{X_n \xrightarrow{\ell^1} X}$ PROSSIMA VOLTA