Metodi Matematici - Ex. 4

Titolo nota

24 ottobre 2017 (8:30-9.15) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

ES. 26
LISTA 2

$$e_i = (0,0,0,\dots,0,\underset{\text{i-esima posizione}}{1},0,\dots\ )$$

a

$$\mathcal{B} = \{e_0, e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$$

Base di Hilbert.

$$X = (a_n) \subset \ell^2 \qquad (X, e_i) = a_i$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \langle X, e_i \rangle e_i \xrightarrow{\ell^2} X$$

$$\parallel$$

$$\lim_{n\to+\infty} \boxed{\sum_{i=0}^{n} \langle X, e_i\rangle e_i} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots)}_{X_n \xrightarrow{\ell^2} X}$$

$$\|X_n - X\|_{\ell^2} = \|(0,0,\dots,0,\underline{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots})\|_{\ell^2}$$

$$= \underbrace{\sqrt{\sum_{i=n+1}^{+\infty} (a_i)^2}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

$$\boxed{\text{Perché } \sum_{n=0}^{+\infty} (a_i)^2 < +\infty}$$

$\boxed{b}$ $B = \{ x \in \ell^2 \mid \|x\|_{\ell^2} \leq 1 \}$ è chiuso e limitato (ovvio)

B non è compatto, cioè riesco a trovare una succ. in B tale che nessuna sua sottosucc. converge.

Prendo $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.e.

i-esima posiz.

$$x_i = e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0 \dots)$$

$$\|x_i - x_j\|_2 = \|(0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots)\|$$

$i \neq j$ i-esima pos. j-esima posiz.

$$= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Quindi ogni sottosucc. $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ di $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avrà stessa proprietà, cioè $\forall i, j \in \mathbb{N}$ (con $i \neq j$)

$$\|x_{k_i} - x_{k_j}\|_2 = \sqrt{2}$$

Quindi non è di Cauchy, e quindi non può convergere.

Quindi, avendo $(x_n) \subset B$ posso dire che B non è compatto.

$\boxed{C}$ $K = \{\bar{0}\} \cup \{ e_0, e_1, \frac{e_2}{2}, \frac{e_3}{3}, \frac{e_4}{4}, \dots, \frac{e_n}{n}, \dots \}$

$span(K) = span(B) \Rightarrow span(K)$ ha dim. infinita

Presa comunque (X_n) in K distinguiamo 2 casi:

1) (X_n) ha immagine finita $\Rightarrow \exists (X_{n_k})$ succ. costante e quindi convergente a punto di K.

2) (X_n) non ha immagine finita $\Rightarrow$ quindi esistono in (X_n) elementi del tipo $\frac{e_n}{n}$ con n arbitrariamente grande. Costruisco sottosucc. di (X_n) usando tali elementi, quindi sottosucc. sono del tipo $\left(\frac{e_{n_k}}{n_k}\right)$

Con $n_k \to +\infty$, si convergenza

$$\left\| \frac{e_{n_k}}{n_k} \right\|_{\ell_2} = \frac{1}{n_k} \cdot \| e_{n_k} \|_2 = \frac{1}{n_k} \to 0$$

$$\| \;\;$$

$$\left\| \frac{e_{n_k}}{n_k} - \bar{0} \right\|_2 \Rightarrow \frac{e_{n_k}}{n_k} \xrightarrow{\ell^2} \bar{0}$$

Quindi anche in questo secondo caso posso estrarre da (X_n) una succ. convergente a un punto di K.

Quindi K è compatto.

ES. (*) Risolvere in $[0,\pi]$:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(0,x) = \sin(9x) \\ u_t(0,x) = 0 \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \end{cases}$$

$$u(t,x) = X(x)\cdot T(t)$$

$$u_{tt}(t,x) = X(x)\cdot T''(t)$$

$$u_{xx}(t,x) = X''(x)\cdot T(t)$$

$$X T'' = c^2 X'' T$$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \boxed{\frac{X''(x)}{X(x)}}$$

$$\begin{cases} X'' \underbrace{- k}\, X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

So che c'è sol. non nulla solo per $\boxed{-k = \omega^2}$

con $\omega = n$

$$X'' + n^2 X = 0 \qquad \lambda = \pm i n$$

$$\boxed{X_n(x) = \alpha \sin(nx)}$$

$$T'' + n^2c^2 T = 0 \qquad \lambda = \pm i n c$$

$$T_n(t) = A\cos(nct) + B\sin(nct)$$

$$u_n(t,x) = X_n(x)\cdot T_n(t)$$

$$\boxed{u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(nx)\left(\alpha_n\cos(nct) + \beta_n\sin(nct)\right)}$$

$u(0,x) = \sin(5x)$

$u_t(0,x) = 0$

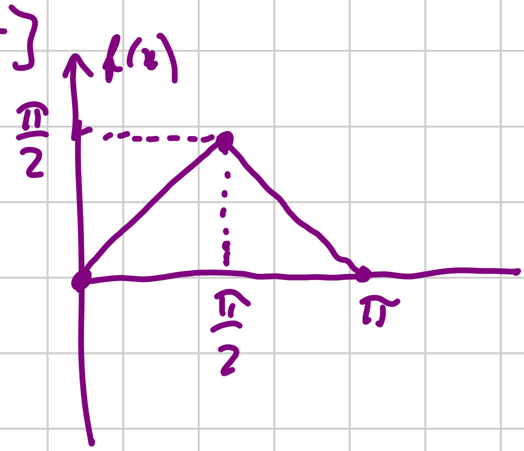
$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \sin(nx)$$

$$u_t(0,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \cdot nc\sin(nx)$$

$$u(t,x) = \boxed{\sin(5x)\cdot\cos(5ct)}$$

Per caso risolvere in $[0,\pi]$

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(0,x) = f(x) \\ u_t(0,x) = 0 \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{se } \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$$