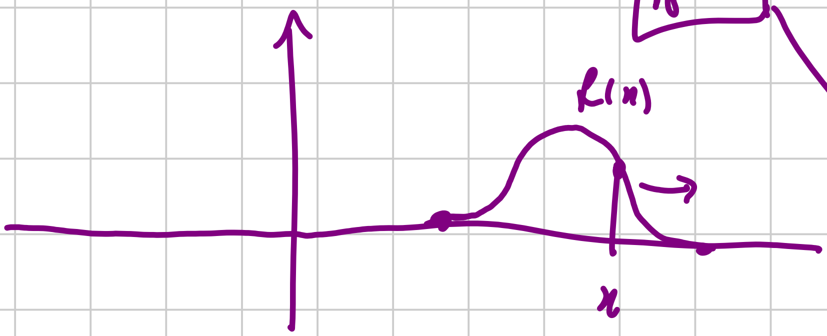
Metodi Matematici - Ex. 5

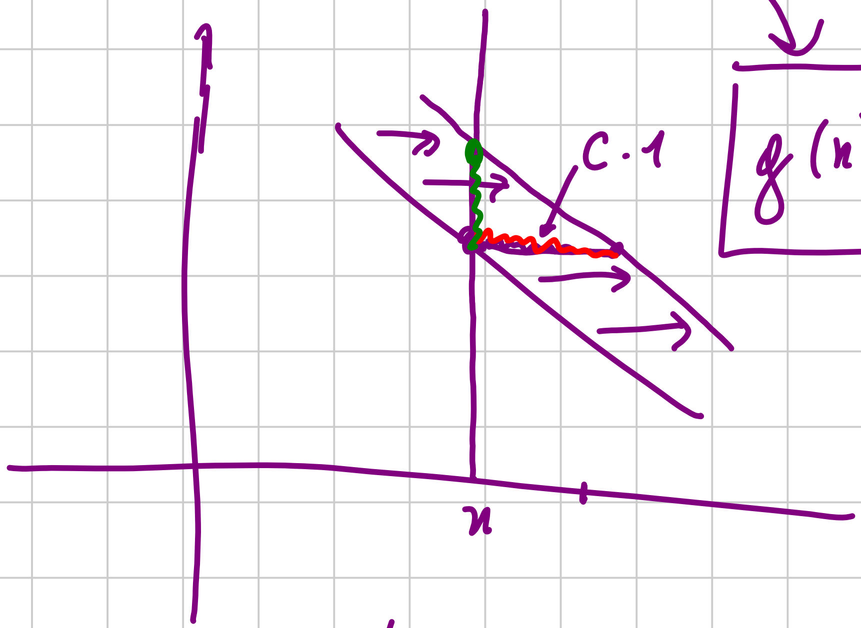
Titolo nota

31 ottobre 2017 (8:30-9.15) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

Es. 7 LISTA 3

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = f(x) & \leftarrow \text{data} \\ u_t(0,x) = \boxed{g(x)} & \leftarrow \text{trovare in modo che onde si sposti in avanti con velocità } c \end{cases}$$





??

$$\boxed{g(x) = -c\, f'(x)}$$

Congetturo se $g(x) = -c\, f'(x)$ allora $u(t,x) = f(x-ct)$

$$u(t,x) = \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \underbrace{g(y)}_{\boxed{-c f'(y)}}\, dy =$$

$$= \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} - \frac{1}{2}\int_{x-ct}^{x+ct} f'(y)\, dy =$$

$$= \frac{\cancel{f(x+ct)} + f(x-ct)}{2} - \frac{1}{2}\left(\cancel{f(x+ct)} - f(x-ct)\right) =$$

$$= \boxed{f(x-ct)}$$

Se voglio onda solitaria di forma $f(x)$ che va indietro prendo $g(x) = c\,f'(x)$

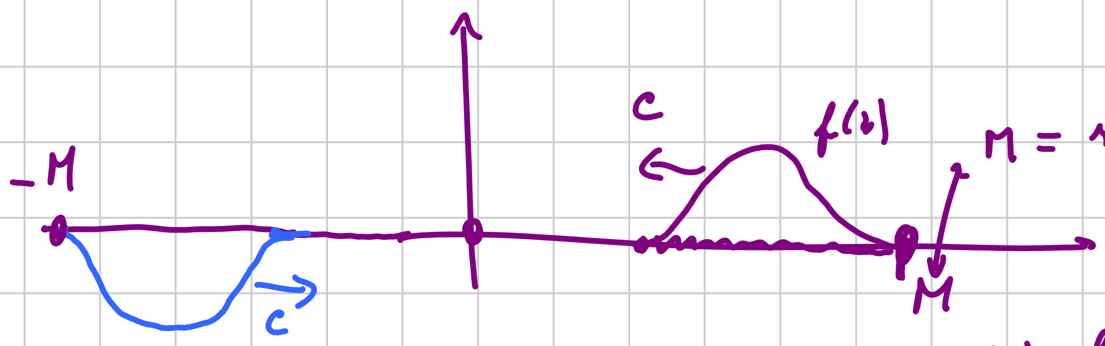
ES. 8-9 LISTA 3

Dato (1)

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ u(0,x) = f(x) & \leftarrow C^2 \text{ a supp. compatto in } (0,+\infty) \\ u_t(0,x) = c\,f'(x) \\ u(t,0) = 0 \end{cases}$$

dove K è il supporto di f

$M = \sup K$



Prendo

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(0,x) = \varphi(x) & \leftarrow f(x) - f(-x) \\ u_t(0,x) = \psi(x) & \leftarrow \boxed{c\,f'(x) - c\,f'(-x)} \end{cases}$$

$c\,f'(x)$

prendo $f(x)$ e $g(x)$ e prolungo per disparità

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)\,dy =$$

$$= \boxed{\frac{f(x+ct) - \cancel{f(-x-ct)} + \cancel{f(x-ct)} - f(-x+ct)}{2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\cancel{c}} \int_{x-ct}^{x+ct} \left(\cancel{c} f'(y) - \cancel{c} f'(-y) \right) dy =$$

$$= \boxed{\dots} + \frac{1}{2} \Big[f(y) + f(-y) \Big]_{x-ct}^{x+ct} =$$

$$= \boxed{} + \frac{1}{2} \left(f(x+ct) + \cancel{f(-x-ct)} - \cancel{f(x-ct)} - f(-x+ct) \right)$$

$$= f(x+ct) - f(-x+ct) =$$

$$= \underline{f(x+ct) - f(-(x-ct))} \leftarrow \boxed{\text{vale sempre } 0 \text{ se } x = 0}$$

Quindi $u(t,x)$ così trovata soddisfa in $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ il problema (1).

Inoltre se t è abbastanza grande (cioè se $t > \frac{M}{c}$) allora $u(t,x)$ ha la forma rovesciata.

ES. 10 LISTA 3

Se $u(t,x)$ soddisfa equazione delle onde allora anche $u(-t,x)$ la soddisfa.

So che $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

Posto $v(t,x) = u(-t,x)$

$$v_t(t,x) = -u_t(-t,x)$$

$$\boxed{v_{tt}(t,x)} = \left(-u_t(-t,x)\right)' = -\left(-u_{tt}(-t,x)\right) =$$

$$= u_{tt}(-t,x) = \boxed{c^2 u_{xx}(-t,x)}$$

$$\| $$

$$\boxed{c^2 v_{xx}(-t,x)}$$

$$v_x(t,x) = u_x(-t,x)$$

$$v_{xx}(t,x) = \boxed{u_{xx}(-t,x)}$$