# Metodi Matematici - Ex. 9

Titolo nota

28 novembre 2017 (8:30-9.15) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

$\boxed{\text{ES. 1}}$ Funzionale lineare non continuo.

Sia $V = C([-1,1])$ con $\|\cdot\|_{L^1}$

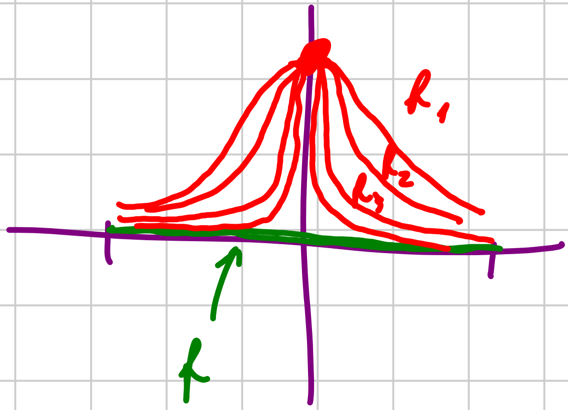
e sia
$$F: V \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto f(0)$$

F è lineare: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f, g \in V$

$$\underbrace{F(\alpha f + \beta g)} = (\alpha f + \beta g)(0) = \alpha f(0) + \beta g(0) =$$
$$= \underbrace{\alpha F(f) + \beta F(g)}$$

F non è continuo, cioè $\exists (f_n)$ in $V$ e $f \in V$ t.c. $f_n \xrightarrow{L^1} f$ ma $F(f_n) \not\to F(f)$

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{se } |x|<1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$




$$f_n(x) = \varphi(nx)$$

$$f_n(0) = \varphi(0) = \frac{1}{e} \qquad F(f_n) = \frac{1}{e} \to \frac{1}{e} \neq F(f)$$

$$f_n \xrightarrow{L^1} f \Leftarrow f(x) \equiv 0$$

$$\int_{-1}^{1} |f_n(x)|\,dx = \int_{-1}^{1} \varphi(nx)\,dx = \frac{1}{n} \int_{-1}^{1} \varphi(x)\,dx \to 0$$

---

**ES. 2** $V = \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$F : V \to \mathbb{R}$$
$$\varphi(x) \to \varphi(0)$$

F è lineare (come prima)

Stavolta F è anche continua:

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} \varphi \Rightarrow F(\varphi_n) \to F(\varphi)$$

$$\Downarrow$$

$\exists K$ compatto contenente tutti i supporti t.c. $\|\varphi_n - \varphi\|_{L^\infty(K)} \to 0$

$$\underbrace{|F(\varphi_n) - F(\varphi)|}_{\downarrow\, 0} = |\varphi_n(0) - \varphi(0)| \le \|\varphi_n - \varphi\|_{L^\infty(K)} \to 0$$

(Funziona anche se $\varphi \xrightarrow{F} \varphi(x_0)$)

$\boxed{\text{ES. 3}}$

$$F : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$\varphi \mapsto \varphi'(0)$$

1) $F$ lineare (ovvio)

2) $F$ continua:

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} \varphi \Rightarrow \underbrace{\exists K \text{ compatto t.c. } \|\varphi_n' - \varphi'\|_{L^\infty(K)} \to 0}$$

$$\underbrace{|F(\varphi_n) - F(\varphi)|}_{\downarrow \; 0} = |\varphi_n'(0) - \varphi'(0)| \leq \|\varphi_n' - \varphi'\|_{L^\infty(K)} \to 0$$

$\boxed{\text{Quindi } F \text{ è continua}}$

---

OSS. Se $F$ è un funzionale lineare, verificare se è continuo equivale a verificare se è continuo in $\bar{0}$ perché, grazie alla linearità

$$F(\varphi_n) \to F(\varphi) \iff F(\varphi_n - \varphi) \to \underset{\substack{\uparrow \\ F(0)}}{0}$$

**ES 4** Dire se è una distribuzione la seguente F:

Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$,

definiamo: 
$$F: \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$\varphi \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(x_k)$$

dire se è distribuzione nei casi:

→ 1) $x_k = k$

2) $x_k = \frac{1}{k}$

**Caso 1** ⓪ F è ben definita

① F è lineare perché $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (somma finita)

$$F(\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha\varphi_1(k)+\beta\varphi_2(k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n_0} \left(\alpha\varphi_1(k)+\beta\varphi_2(k)\right) =$$

$$= \alpha \sum_{k=0}^{n_0} \varphi_1(k) + \beta \sum_{k=0}^{n_0} \varphi_2(k) =$$

$$= \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_1(k) + \beta \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_2(k) = \alpha F(\varphi_1)+\beta F(\varphi_2)$$

Continuità: Se $\underbrace{\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} 0}_{\Downarrow}$ (allora $F(\varphi_n) \to 0$)

$\exists K$ compatto t.c. $\|\varphi_n\|_{L^\infty(K)} \to 0$

Sia $k_0$ t.c. se $k > k_0$ allora $k \notin K$.

$$|F(\varphi_n)| \le \sum_{k=0}^{k_0} |\varphi_n(k)| \le \sum_{k=0}^{k_0} \|\varphi_n\|_{L^\infty(K)} =$$

$$= (k_0+1)\,\|\varphi_n\|_{L^\infty(K)} \to 0$$

Caso $x_k = \frac{1}{k}$

$$\varphi \xmapsto{\ F\ } \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi\left(\frac{1}{k}\right)$$

variante per cui $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \varphi\left(\frac{1}{k}\right)$ scegliendo $a_k = \frac{1}{k}$ oppure $a_k = \frac{1}{k^2}$

Se $\varphi(0) \neq 0$ allora $\varphi\left(\frac{1}{k}\right) \to \varphi(0) \neq 0$

quindi $\sum_{k=1}^{+\infty} \varphi\left(\frac{1}{k}\right)$ diverge.

quindi $F$ non è ben definita in tutto $\mathcal{D}(\mathbb{R})$