Metodi Matematici - Ex. 12

Titolo nota

19 dicembre 2017 (8:30-9.15) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

$\boxed{\text{ES. 15 Lista 5}}$ Calcolare $\left(\frac{d}{dx}\right)^k (|x|)$.

$k=1$ e $k=2$ già fatti:

$(|x|)' = \operatorname{sgn}|x|$

$(\operatorname{sgn} x)' = \delta_0$

$(\delta_0)'(\varphi) = -\delta_0(\varphi') = -\varphi'(0)$

$(\delta_0)''(\varphi) = -(\delta_0)'(\varphi'(x)) = -(-\varphi''(0)) = \varphi''(0)$

$(\delta_0)^{(k)}(\varphi) = \dots = (-1)^k \varphi^{(k)}(0)$

---

16) Trovare tutte le $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tali che $T' = \delta_0$, dove δ_0 è la delta di Dirac in 0, cioè $\delta(\varphi) = \varphi(0)$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$\boxed{\text{SOL}}$ Una T che va bene è $T_{\operatorname{sgn}(x)}$

Ora, se T soddisfa $T' = \delta_0$ allora

$$(T - T_{\operatorname{sgn} x})' = T' - T'_{\operatorname{sgn} x} = \delta_0 - \delta_0 = 0$$

$$\uparrow$$

$$T - T_{\operatorname{sgn} x} = \text{costante}$$

$$c \in \mathbb{R}$$

$$T = T_{\operatorname{sgn} x} + T_c = \underline{T_{\operatorname{sgn} x + c}}$$

---

17) Trovare tutte le $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tali che $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ $T'(\varphi) = \varphi''(0)$.

$$T'(\varphi) = \varphi''(0)$$

$$1 \quad \boxed{T(\varphi) = -\varphi'(0)}$$

$$\longrightarrow \quad T'(\varphi) = -T(\varphi') = -(-\varphi''(0)) = \varphi''(0)$$

Quindi 1 va bene e tutte le altre che van bene sono:

$$(T + T_c) : \varphi \longmapsto -\varphi'(0) + \int_{\mathbb{R}} c\,\varphi(x)\,dx$$

$$\forall c \in \mathbb{R}$$

18) Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tale che $xT = 0$.

a) Dire chi è il supporto di T.

b) Trovare tutte le T di ordine 0 che soddisfano la condizione richiesta

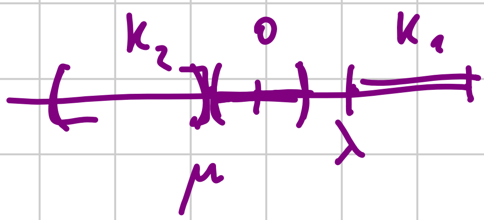
c) Trovare tutte le T di ordine 1 che soddisfano la condizione richiesta

$\boxed{\text{SOL}}$ (a) (*) se $\underline{\operatorname{supp} \varphi \cap \{0\} = \emptyset}$ allora $T(\varphi) = 0$

OSS. Se $K \subset \mathbb{R}$ è compatto e non contiene 0 allora $\exists\, \delta > 0$ t.c. $(-\delta, \delta) \cap K = \emptyset$.

Infatti detti $K_1 = K \cap [0, +\infty)$ e $K_2 = K \cap (-\infty, 0]$ questi sono compatti e $K_1 \subset (0, +\infty)$ e $K_2 \subset (-\infty, 0)$.

Quindi, sia $\lambda = \min K_1 > 0$ e $\mu = \max K_2 < 0$, prendiamo $\delta = \min\{\lambda, -\mu\}$ avrò che $(-\delta, \delta) \cap K = \emptyset$



$$T(\varphi) = T(x\psi(x)) = (xT)(\psi(x)) = 0$$

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \ni \psi(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x)}{x} & \text{se } x \notin (-\delta, \delta) \\ 0 & \text{se } x \in (-\delta, \delta) \end{cases}$$

Da (*) segue che $\operatorname{supp} T \subset \{0\}$

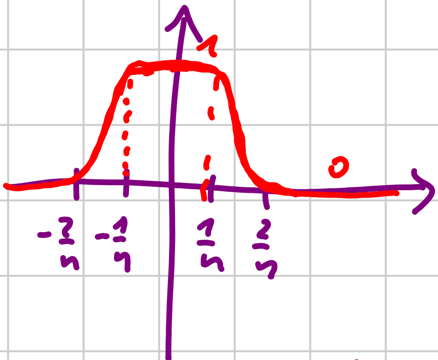
Quindi o T è identicamente nulla o $\operatorname{supp} T = \{0\}$.

Vediamo che $T = \delta_0$ va bene:

$$(xT)(\varphi) = (x\delta_0)(\varphi) = \delta_0(x\varphi(x)) =$$

$$= 0 \cdot \varphi(0) = 0$$

(b) $\left(\operatorname{supp} T = \{0\} \text{ e } \operatorname{ord}(T) = 0\right) \Rightarrow T = c\delta_0$

$\psi_n(x) =$ 

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ t.c. $\varphi(0) = 0$

$$|T(\varphi)| = |T((1-\psi_n+\psi_n)\varphi)| =$$

$$= |T((1-\psi_n)\varphi + \psi_n\varphi)| =$$

$$= |T((1-\psi_n)\varphi) + T(\psi_n\varphi)|$$

$$= |0 + T(\psi_n\varphi)| = |T(\psi_n\varphi)|$$

$$0 \le |T(\varphi)| \le |T(\varphi_n \varphi)| \le C \cdot \|\varphi_n \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = C\,\|\varphi_n \varphi\|_{L^\infty([-\frac{2}{n}, \frac{2}{n}])} \le$$

$$\le C \cdot \underbrace{\|1 \cdot \varphi\|_{L^\infty[-\frac{2}{n}, \frac{2}{n}]}}_{\substack{n \to +\infty \ \downarrow \\ \varphi(0) = 0}}$$

$\Leftarrow$ per continuità di φ in 0

$$\Downarrow$$

$$T(\varphi) = 0$$

Prendo una $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ t.c. $\varphi_0(0) = 1$

e sia c t.c.

$$T(\varphi_0) = c$$

mostriamo che $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ $\quad T(\varphi) = c\delta$,

prendo $\quad \psi(x) = \varphi(x) - \varphi(0)\varphi_0(x)$

uso che $\quad \psi(0) = \varphi(0) - \varphi(0) \cdot \varphi_0(0) = \varphi(0) - \varphi(0) = 0$

Quindi $\quad T(\psi(x)) = 0$

$$\shortparallel$$

$$T(\varphi(x) - \varphi(0) \cdot \varphi_0(x)) = T(\varphi(x)) - \varphi(0)\,T(\varphi_0(x))$$

$$= T(\varphi(x)) - c\,\varphi(0)$$

Quindi: $T(\varphi(x)) = c\,\varphi(0)$

$$T = c\,\delta_0$$

Quindi tutte le T t.c. $xT = 0$ e T ha ordine 0 sono del tipo $T = c\,\delta$.