Metodi Matematici - Lez. 1

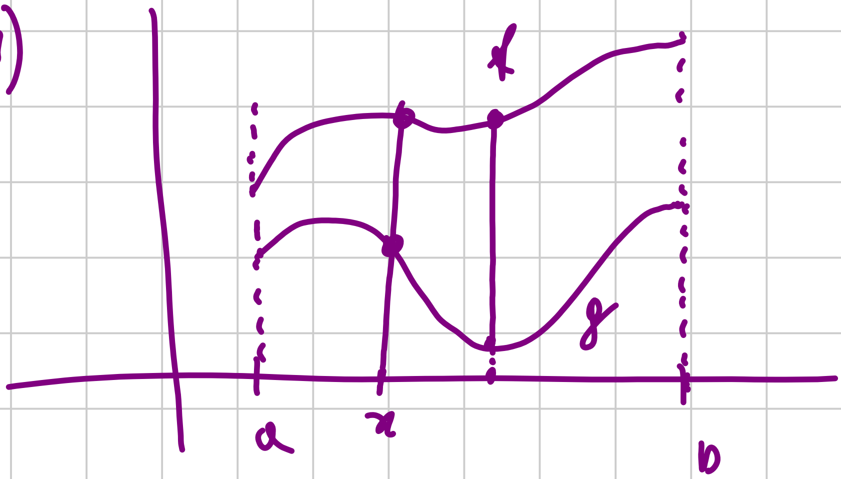
Titolo nota

25 settembre 2017 (14.00-15.45) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

ANALISI FUNZIONALE

DISTANZA TRA FUNZIONI

ES. $C([a,b])$



$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|$$

CONTINUE

Per chiamarla distanza bisogna che: $X = C([a,b])$

1) $\forall f,g \in X \quad d(f,g) \geq 0$ e vale $=0$ se e solo se $f=g$

2) $\forall f,g \in X \quad d(f,g) = d(g,f)$

3) $\forall f,g,h \in X \quad d(f,g) + d(g,h) \geq d(f,h)$

Mostriamo che d_∞ soddisfa (1), (2) e (3).

(1) $d_\infty(f,g) \geq 0$ (ovvio)

se poi $f \neq g$ si ha $f(x) \neq g(x)$ per qualche x

e quindi $\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| > 0$.

(2) (ovvio)

(3) $\forall f,g,h \quad d_\infty(f,h) \overset{?}{\leq} d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h)$ $\boxed{\text{SI}}$

$$d_\infty(f,h) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - h(x)|$$

$$d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h) = \underbrace{\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|}_{=\lambda} + \underbrace{\sup_{x\in[a,b]} |g(x) - h(x)|}_{=\mu}$$

$$= \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| \leq$$

$$\leq \sup_{x\in[a,b]} \Big(\underbrace{|f(x) - g(x)|}_{\leq \lambda} + \underbrace{|g(x) - h(x)|}_{\leq \mu} \Big) \leq \lambda + \mu$$

$\boxed{\text{OSS.}}$ $d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty$ se decidiamo

che $\forall h \in C([a,b])$ $\boxed{\|h\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |h(x)|}$

e $\|\cdot\cdot\|_\infty$ è una norma perché soddisfa le seguenti proprietà:

$\boxed{\text{DEF}}$ Dato X sp. vettoriale (su $\mathbb{R}$) e detta $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ diremo che $\|\cdot\|$ è norma se:

1) $\forall f \in X$ $\|f\| \geq 0$ e $= 0$ vale se e solo se $f =$ vettore nullo.

2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\forall f \in X$ $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$

3) $\forall f, g \in X$ $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

$\boxed{\text{ES. 2}}$ Prendiamo $C([a,b])$ e per ogni $f, g \in$ definiamo

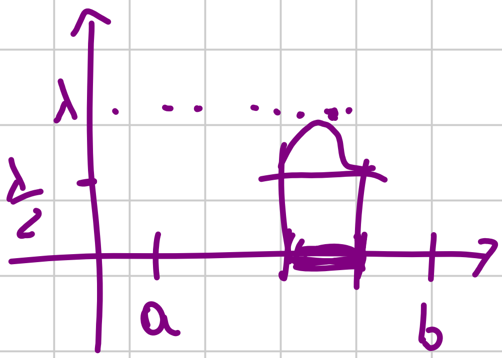
$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$$

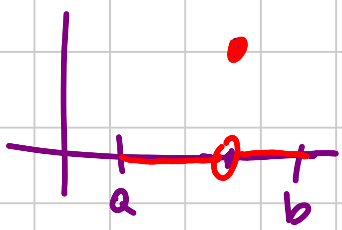
$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| \, dx$$

Mostriamo che $\|\cdot\|_1$ è norma:

(1) $\|\ldots\|_1 \geq 0$ (ovvio)

$\| \ \|_1 > 0$ se $f \not\equiv 0$





Se $f \not\equiv 0$ e continua allora $\exists x_0 \in [a,b]$ t.c.

$|f(x_0)| = \lambda > 0$ quindi $\exists I$ intorno di x_0

t.c. $|f(x_0)| > \frac{\lambda}{2}$ in tutto I quindi:

$$\int_a^b |f(x)|\, dx \geq \int_I |f(x)|\, dx \geq \int_I \frac{\lambda}{2}\, dx = \frac{\lambda}{2} \cdot \text{mis}(I) > 0$$

(2) $$\|\alpha f\|_1 = \int_a^b |\alpha f(x)|\, dx = |\alpha| \cdot \int_a^b |f(x)|\, dx = |\alpha| \cdot \|f\|_1$$

(3) $$\|f+g\|_1 \overset{?}{\leq} \|f\|_1 + \|g\|_1$$

$$\|$$

$$\int_a^b |f(x)+g(x)|\, dx \leq \int_a^b |f(x)| + |g(x)|\, dx =$$

$$= \int_a^b |f(x)|\, dx + \int_a^b |g(x)|\, dx =$$

$$= \|f\|_1 + \|g\|_1$$

$\boxed{\text{ES. 3}}$ $C([a,b])$ $\quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$

$$d_2(f,g) = \|f-g\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)-g(x)|^2 dx}$$

ES. 4 ES3 in dim finita è:

$$\mathbb{R}^n \quad v=(x_1,\dots,x_n), \quad \|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

ES. 5 ES.1 in dim. finita è:

$$\mathbb{R}^n \quad v=(x_1,\dots,x_n), \quad \|v\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

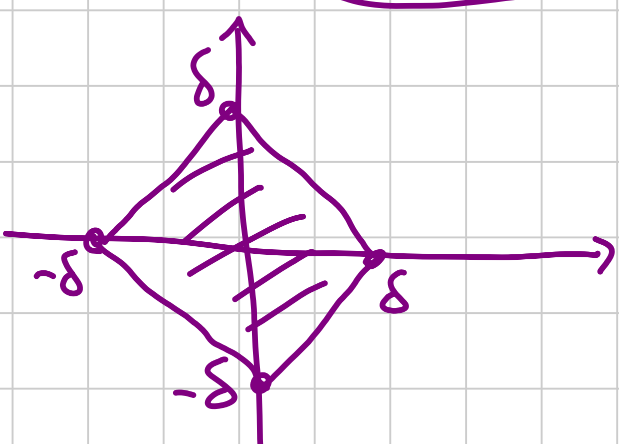
ES 6 ES.2 in dim. finita è:

$$\mathbb{R}^n \quad v=(x_1,\dots,x_n), \quad \|v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$\mathbb{R}^2$ Palla di centro $(0,0)$ e raggio δ con $\| \ \|_1$

$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\|_1 < \delta\}$$

$|x|+|y|<\delta$



$\boxed{\text{Def}}$ Dato X sp. vettoriale e $\| \, \|_A$ e $\| \, \|_B$ norme su X, diremo che $\| \, \|_A$ e $\| \, \|_B$ sono equivalenti se $\exists^{no}$ $C_1, C_2 > 0$ t.c.

$$\forall f \in X \quad C_1 \|f\|_A \leq \|f\|_B \leq C_2 \|f\|_A$$

$\boxed{\text{Def.}}$ Dato X sp. vett., $\|\cdot\|$ norma su X, (f_n) successione in X e $f \in X$ diremo che $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} f$ se $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0$

$\boxed{\text{OSS.}}$ Due norme $\|\cdot\|_A$ e $\|\cdot\|_B$ equivalenti danno la stessa convergenza:

$$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_A} f \iff \|f_n - f\|_A \to 0$$

$$C_1 \|f_n - f\|_A \leq \|f_n - f\|_B \leq C_2 \|f_n - f\|_A$$

$$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_B} f \iff \|f_n - f\|_B \to 0$$

$\boxed{\text{ES 2}}$ $f_n \xrightarrow{L^\infty} f \Rightarrow \underbrace{f_n \xrightarrow{L^1} f}$ $(\Leftarrow \text{NO})$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \, dx = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n-f\|_1 = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \underbrace{|f_n(x)-f(x)|}_{\leq \|f_n-f\|_\infty} dx \leq$$

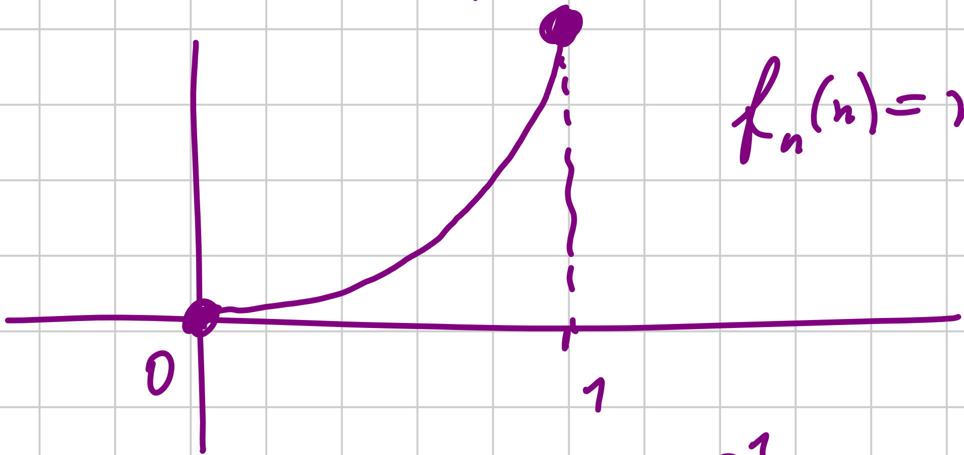
$$\leq \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \|f_n-f\|_\infty \, dx =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \|f_n-f\|_\infty \cdot \int_a^b 1 \, dx =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\|f_n-f\|_\infty \cdot (b-a)\right) = 0$$

Tuttavia esistono (f_n) in $C([a,b])$ t.c.

$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} 0$ ma $f_n \not\xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} 0$



$f_n(x) = x^n$

$\|f_n\|_\infty = 1$ $\qquad$ $\|f_n\|_1 = \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}$

$\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \to 0$ $\qquad$ $\|f_n\|_\infty \not\to 0$