Metodi Matematici - Lez. 2

Titolo nota

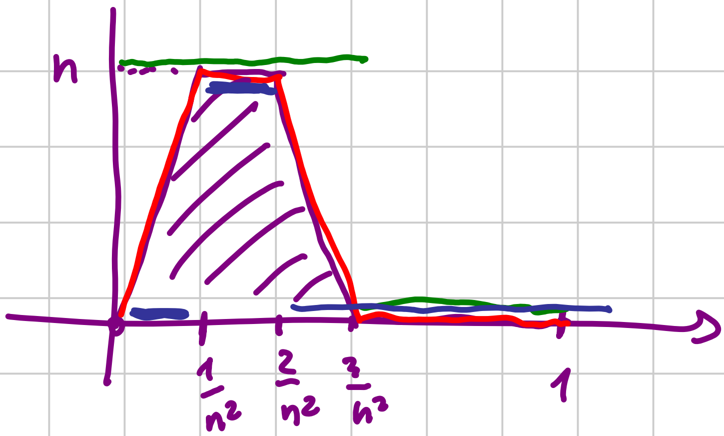
26 settembre 2017 (9:30-11.15) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

(CONTINUA...) NORME EQUIVALENTI

$\boxed{\text{ES. 1}}$ Trovare (f_n) in $C([0,1])$ t.c.

$$f_n \xrightarrow{L_1} 0 \quad \text{ma t.c.} \quad f_n \overset{L_2}{\not\to} 0$$

$f_n(x)$



$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(x)|\,dx \leq \int_0^1 n \cdot \chi_{[0,\frac{3}{n^2}]}(x)\,dx = \frac{3}{n} \to 0$$

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 |f_n(x)|^2\,dx \geq \int_0^1 \left(n \cdot \chi_{[\frac{1}{n^2},\frac{2}{n^2}]}(x)\right)^2 dx = 1 \not\to 0$$

$\boxed{\text{OSS 1}}$ Data (f_n) in $C([a,b])$, se $f_n \xrightarrow{L^2} 0$ allora $f_n \xrightarrow{L_1} 0$.

$\boxed{\text{DIM}}$

$$\int_a^b |f_n(x)|\,dx = \int_a^b |f_n(x)| \cdot 1\,dx \leq \sqrt{\int_a^b |f_n(x)|^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b 1^2\,dx} = (*)$$

$\boxed{\text{Dis. di C.S}}$ $\Leftrightarrow$ $$\int_a^b |f(x)|\,|g(x)|\,dx \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b |g(x)|^2 dx}$$

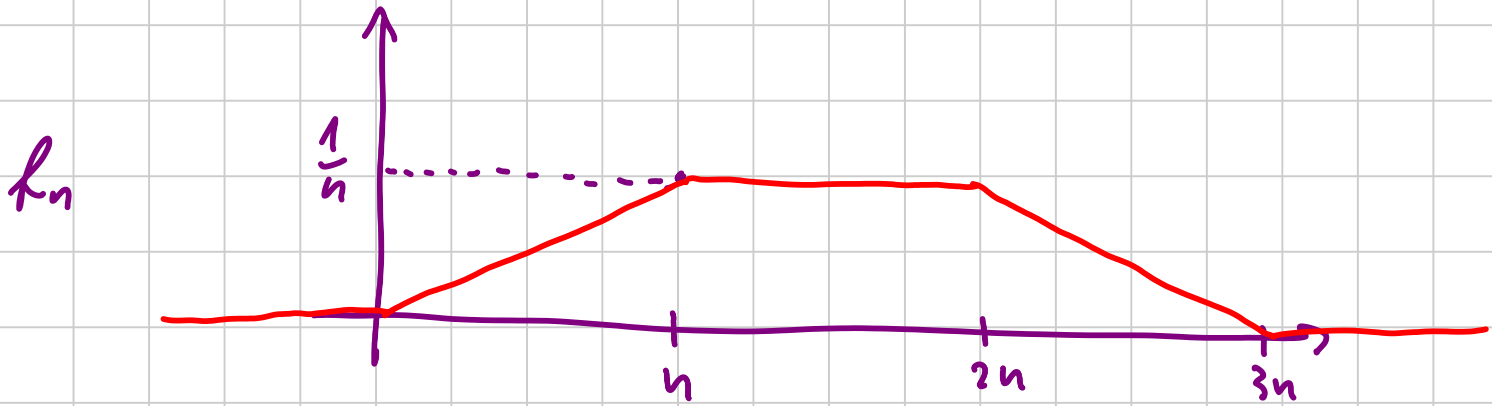
$$\langle f, g \rangle \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

$$(*) = \|f_n\|_2 \cdot \sqrt{b-a} \to 0$$

$\boxed{\text{P. Casa}}$ confrontare norme $L_1 - L_\infty$

$\boxed{\text{ES. 2}}$ Trovare (f_n) in $C(\mathbb{R})$ t.c.

$f_n \xrightarrow{L^2} 0$ ma $f_n \overset{L_1}{\not\to} 0$.



$$\|f_n\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x)|\,dx > \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \chi_{[n,2n]}(x)\,dx = 1 \not\to 0$$

$$\|f_n\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x)|^2 dx < \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \chi_{[0,3n]}(x)\right)^2 dx = \frac{3\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}} = \frac{3}{n} \to 0$$

PER CASA TROVARE ESEMPI IN $C(\mathbb{R})$ CON ALTRE NORME

COMPLETEZZA - SP. DI BANACH

ES. (Stupido) $\nexists$ una succ. in $\mathbb{Q}$ il cui limite non sta in $\mathbb{Q}$.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e \notin \mathbb{Q}$$

$\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow \Uparrow$
$\mathbb{Q}$

$\boxed{\text{Def.}}$ Dato X insieme e d distanza su X e data (f_n) succ. in X, diremo che (f_n) è di Cauchy se:

$$\forall \varepsilon>0 \ \underbrace{\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n,m \geq n_0}_{\text{definitivamente in } n,m} \ d(f_n, f_m) < \varepsilon$$

$\boxed{\text{Def.}}$ Dato X insieme e d distanza su X e data (f_n) succ. in X e $f \in X$, diremo che $f_n \longrightarrow f$ se

$$\forall \varepsilon>0 \ \underbrace{\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \geq n_0}_{\text{definit. in } n} \ d(f_n, f) < \varepsilon$$

$\boxed{\text{OSS.}}$ Dati X, d, (f_n) e f come sopra,

se $f_n \to f$ allora (f_n) è di Cauchy.

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\forall \varepsilon > 0$, poiché $f_n \to f$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$\forall n \geq n_0$ si ha $d(f_n, f) < \frac{\varepsilon}{2}$

Ma allora $\forall m, n \geq n_0$ si ha:

$$d(f_n, f_m) \leq d(f_n, f) + d(f, f_m) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\boxed{\text{Def.}}$ Sia (X, d) sp. metrico, diremo che esso è COMPLETO se ogni succ. di Cauchy è anche convergente

---

$\boxed{\text{Def.}}$ Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato diremo che esso è uno SPAZIO DI BANACH se è completo con la distanza indotta da $\|\cdot\|$

$\boxed{\text{ES. 3}}$ $\overbrace{C([a,b])}^{X}$ con $\|\cdot\|_\infty$ è di Banach.

$\boxed{\text{DIM}}$ Data (f_n) di Cauchy in X voglio mostrare che $\exists f \in X$ t.c. $f_n \to f$

f_n di Cauchy significa che

$\forall \varepsilon > 0$ def. in n, m $\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

$\Downarrow$

$\forall x \in [a,b]$ $\forall \varepsilon > 0$ def in n, m $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

$\Downarrow$

$\forall x \in [a,b]$ $f_n(x)$ è una succ. in $\mathbb{R}$ che converge a un valore che indichiamo con $f(x)$.

Questo definisce una nuova funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

Mostriamo che $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$.

$\boxed{\forall \varepsilon > 0}$ def. in n, m $\|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$

$\boxed{\forall x \in [a,b]\ \forall n, m > n_0} |f_n(x) - \underset{\downarrow \atop f(x)}{f_m(x)}| < \frac{\varepsilon}{2}$

Passando al limite per $m \to +\infty$ si ha:

....

$\boxed{\forall x \in [a,b]} \forall m, n \geq n_0$ $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

facendo sup per $\xrightarrow{x\in[a,b]}$

$\forall \varepsilon > 0$ def. in n $\quad \| f_n - f \|_\infty < \varepsilon$

cioè $f_n \to f$ con $\| \cdot \|_\infty$.

Mostriamo infine che f è continua, cioè che per ogni punto x_0 $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c. se $|x - x_0| < \delta$ allora $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0$ prendo $n \in \mathbb{N}$ t.c. $\| f_n - f \|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$.

Poi prendo $\delta > 0$ t.c. se $|x - x_0| < \delta$ allora $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

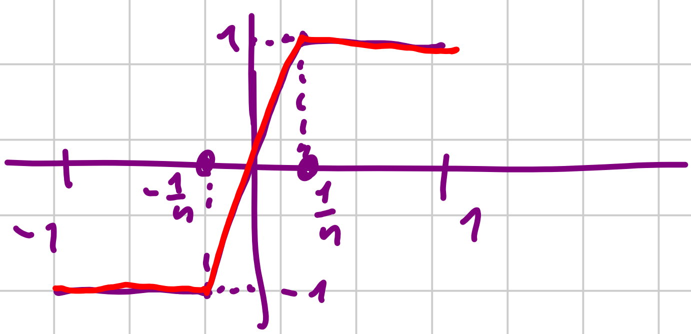
Allora $\forall x$ t.c. $|x - x_0| < \delta$ si ha:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Quindi $f \in C([a,b])$

$\boxed{\text{ES. 4}}$ $\exists (f_n)$ in $C([-1,1])$ t.c. (f_n) è di Cauchy con $\| \cdot \|_1$ ma non è convergente.

f_n



f_n è di Cauchy (S1)

$$\|f_n - f_m\|_{\infty} = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|\, dx \le \int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} 1\, dx \le \frac{2}{m} \to 0$$

$\boxed{n \geq m}$

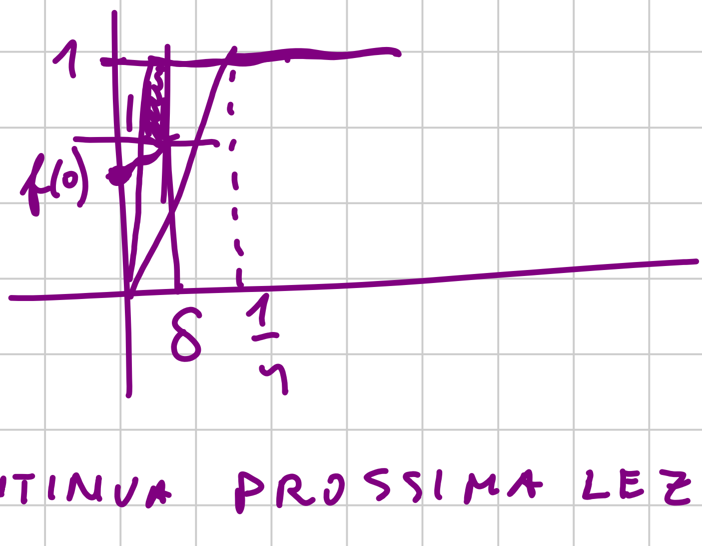
Se per assurdo $f_n \xrightarrow{L^1} f$ continua, allora:

$$\int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)|\, dx \to 0$$

ma allora:

$$\int_{-1}^{0} |f_n(x) - f(x)|\, dx \to 0 \overset{[\dots]}{\Longrightarrow} f(0) = -1$$

$$\int_{0}^{1} |f_n(x) - f(x)|\, dx \to 0 \overset{[\dots]}{\Longrightarrow} f(0) = 1$$



(CONTINUA PROSSIMA LEZIONE.....)