Metodi Matematici - Lez. 3

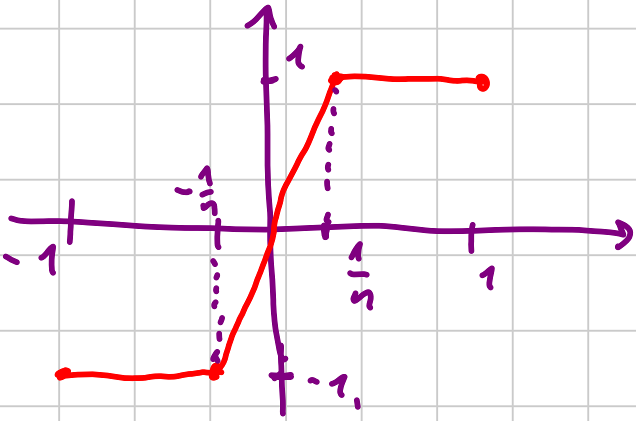
Titolo nota

2 ottobre 2017 (14:00-15.45) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

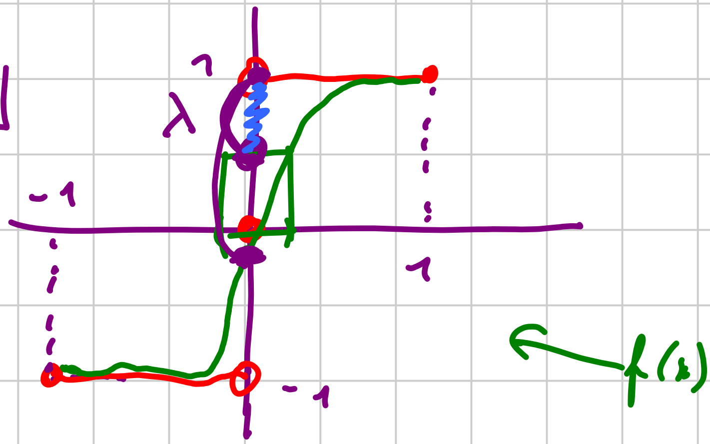
(... continua da volta scorsa)

$C([-1,1])$ non è completo con $\| \cdot \|_{L^1}$

$g_n(x)$ def. da



Oss. $g_n \xrightarrow{L^1} \mathrm{sgn}$



$$\int_{-1}^{1} |g_n(x) - \mathrm{sgn}(x)| \, dx = \frac{1}{n} \to 0$$

$$\int_{-1}^{1} |g_n(x) - f(x)| \, dx \to 0$$ P. A. con f. continua

si avrebbe

$$0 \le \int_{-1}^{1} |f(x) - \mathrm{sgn}(x)| \, dx \le \underbrace{\int_{-1}^{1} |f(x) - g_n(x)| \, dx}_{\to 0} + \underbrace{\int_{-1}^{1} |g_n(x) - \mathrm{sgn}(x)| \, dx}_{\to 0}$$

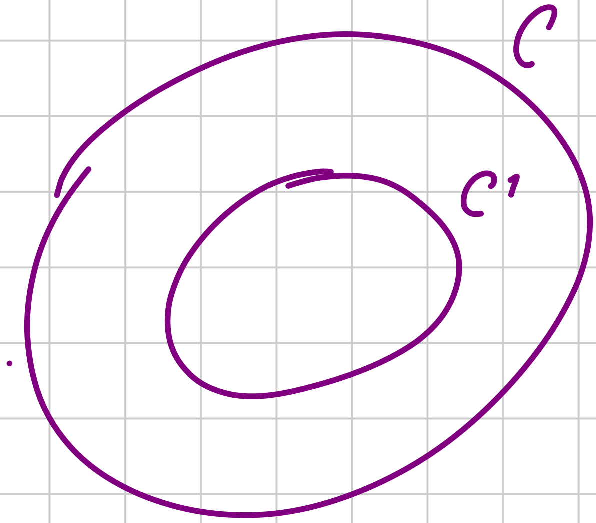
Quindi: $$\int_{-1}^{1} |f(x) - \operatorname{sgn}(x)| \, dx = 0$$

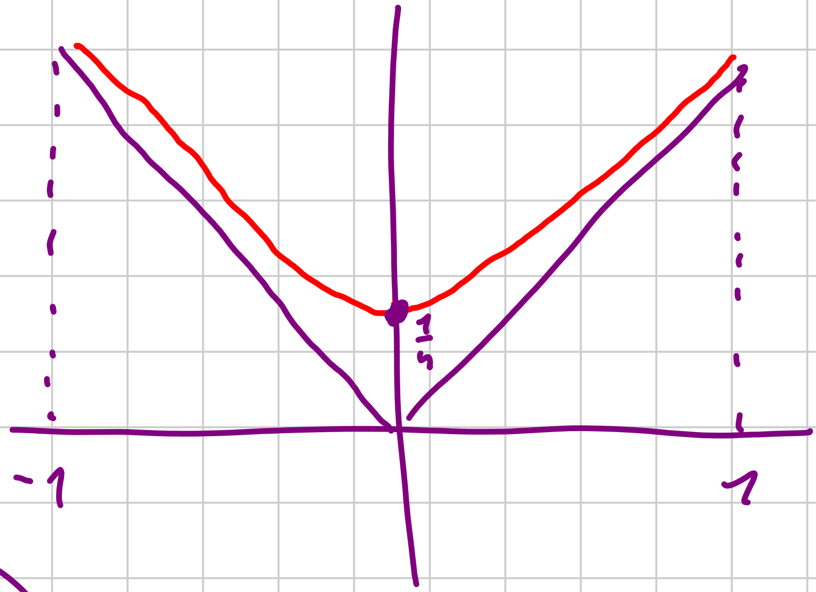
Tale f avrà $f(0) \neq 1$ o $\neq -1$, supponiamo ad esempio $f(0) \neq 1$. Ma allora $\exists \delta > 0$ ed $\exists \lambda > 0$ t.c. $\forall x \in (0, \delta)$ $\quad |f(x) - 1| > \lambda$

Quindi: $$0 = \int_{-1}^{1} |f(x) - \operatorname{sgn}(x)| \, dx \geq \int_{0}^{\delta} |f(x) - \operatorname{sgn}(x)| \, dx \geq$$
$$\geq \int_0^{\delta} \lambda \, dx = \delta \cdot \lambda > 0$$

Assurdo. Quindi tale f continua non esiste.

$\boxed{\text{ES. 1}}$ $\quad C^1([-1,1])$ con $\|\cdot\|_\infty$ non è completo.





$$g_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \qquad g(x) = |x| = \sqrt{x^2}$$

$$g_n(0) = \sqrt{\frac{1}{n}}$$

$$d_\infty(g_n, g) = \sup_{x \in [-1,1]} \left| g_n(x) - \sqrt{x^2} \right| =$$

$$= \sup_{x \in [-1,1]} \left| \frac{\cancel{x^2} + \frac{1}{n} - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \right| = \sqrt{\frac{1}{n}} \to 0$$

$n \to +\infty$

$\boxed{\text{ES. 2}}$ $C^1([a,b])$ con norma $\| \ \|_{\infty,1}$

$$\|f\|_{\infty,1} = \underbrace{\sup_{x \in [a,b]} |f(x)|}_{\|f\|_\infty} + \underbrace{\sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|}_{\|f'\|_\infty}$$

Mostrare che è completo.

Data (f_n) in $C^1([a,b])$ di Cauchy

si ha:

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ def. in } n,m \quad \underbrace{\| f_n - f_m \|_{\infty,1}}_{\Updownarrow} < \varepsilon$$

$$\| f_n - f_m \|_\infty + \| f_n' - f_m' \|_\infty$$

$$(*) \begin{cases} (f_n) \text{ è di Cauchy in } C([a,b]) \\ (f_n') \text{ è di Cauchy in } C([a,b]) \end{cases}$$

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} f_n \xrightarrow{L_\infty} f \in C([a,b]) \\ f_n' \xrightarrow{L_\infty} g \in C([a,b]) \end{cases}$$

Resta da dimostrare che $g = f'$.

Osserviamo che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\, dt$$

Passo al limite per $n \to +\infty$ in ambo i membri

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\, dt \quad (\text{teorema } \dots \text{ da TFCI})$$

$$\int_a^x f_n'(t)\,dt - \int_a^x g(t)\,dt =$$

$$= \int_a^x \left(f_n'(t) - g(t)\right) dt \xrightarrow{?} 0$$

$$\int_a^x \left|f_n'(t) - g(t)\right| dt \le \int_a^x \|f_n' - g\|_\infty \, dt =$$

$$= \|f_n' - g\|_\infty \cdot (x-a) \le \underbrace{\|f_n' - g\|_\infty \cdot (b-a)}_{\downarrow \, 0}$$

COMPLETAMENTO DI $C([a,b])$

con $\|\cdot\|_{L^1}$

$\boxed{\text{I° tentativo}}$ Prendere $\mathbb{Q}([a,b])$ (NO)

$\boxed{\text{Esempio 3}}$ Prendo $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una numerazione di $\mathbb{Q}$, cioè una successione a valori in $\mathbb{Q}$ che lo copre tutto.

Definire $g_0 = \chi_{\{q_0\}}(x)$

$$g_1 = \chi_{\{q_0, q_1\}}(x)$$

$$\vdots$$

$$g_n = \chi_{\{q_0, \dots, q_n\}}(x)$$

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \quad \|g_n - g_m\|_{L^1} = 0$$

Però $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad g_n(x) \to D(x)$

Dirichlet

MISURA DI LEBESGUE

Con P.J. $\quad \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

Peano Jordan $\qquad$ se A e B disgiunti

MA SE $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ è famiglia numerabile

di insiemi disgiunti misurabili non era detto

che:
$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mu(A_i)$$

Def. 1 Dato K compatto di $\mathbb{R}^n$ definiamo

$$\overline{m}(K) = \inf \left\{ \mu(P) \;\middle|\; \begin{array}{l} P \text{ è plurirettangolo} \\ \text{che contiene } K \end{array} \right\}$$

Def. 2 Dato A aperto di $\mathbb{R}^n$ definiamo

$$\underline{m}(A) = \sup \left\{ \mu(P) \;\middle|\; \begin{array}{l} P \text{ è plurirettangolo} \\ \text{contenuto in } A \end{array} \right\}$$

limitato

Def. 3 Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ definiamo

$$\overline{\mu}(E) = \inf \left\{ \underline{m}(A) \;\middle|\; \begin{array}{l} A \text{ è aperto} \\ \text{che contiene } E \end{array} \right\}$$

$$\underline{\mu}(E) = \sup \left\{ \overline{m}(K) \;\middle|\; \begin{array}{l} K \text{ è compatto} \\ \text{contenuto in } E \end{array} \right\}$$

Se $\overline{\mu}(E) = \underline{\mu}(E)$ diremo che

E è misurabile secondo Lebesgue

e $\mu(E) = \overline{\mu}(E) = \underline{\mu}(E)$

Si riesce a dimostrare che se $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sono tutti misurabili e disgiunti allora $\bigcup A_i$ è misurabile e $\mu(\bigcup A_i) = \sum \mu(A_i)$

ES. 4 $\mathbb{Q}$ è misurabile secondo Lebesgue

e $\mu(\mathbb{Q}) = 0$

perché $\mathbb{Q} = \bigcup_{i=0}^{+\infty} q_i$ dove (q_i) e succ.

che copre tutto $\mathbb{Q}$.

INTEGRALE DI LEBESGUE

Def. 1 $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice funzione semplice se

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}(x)$$

dove tutti gli E_i sono misurabili e contenuti in $[a,b]$

Def. 2 Se $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ è semplice

cioè $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}(x)$

allora definiamo

$$\int_{[a,b]} \varphi(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) \cdot \alpha_i$$

$\boxed{\text{Def. 3}}$ $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata

si dice integrabile secondo Lebesgue

se:

$$\inf \left\{ \int_a^b \varphi(x)\,dx \;\middle|\; \varphi \text{ è funzione semplice t.c. } \varphi \geq f \right\}$$

$$= \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x)\,dx \;\middle|\; \varphi \text{ è funzione semplice t.c. } \varphi \leq f \right\}$$