Metodi Matematici - Lez. 4

Titolo nota

3 ottobre 2017 (9:30-11.15) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

SPAZI CON $\langle\, , \rangle$ E SPAZI DI HILBERT

ES. 1 $X = C([a,b])$ e

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx$$

1) $\langle f,g\rangle \overset{?}{=} \langle g,f\rangle$ (SI)

2) $\langle f,f\rangle \geq 0$ con "=" che vale se e solo se $f \equiv 0$ (SI)...

3) $\langle \lambda f,g\rangle = \lambda\langle f,g\rangle$ (SI)

$\langle f_1+f_2,g\rangle = \langle f_1,g\rangle + \langle f_2,g\rangle$

$$\int_a^b \lambda f(x)\cdot g(x)\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx$$

Def. 1 Dato X sp. vett. diremo che $\underbrace{\langle\, , \rangle}_{:X\times X\to\mathbb{R}}$ è un prodotto scalare se

(1) $\langle f,f\rangle \geq 0$ con "=" che vale solo se $f\equiv 0$

(2) $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle \quad \forall f,g$

(3) $\langle \alpha f_1+\beta f_2, g\rangle = \alpha\langle f_1,g\rangle+\beta\langle f_2,g\rangle$

$\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R} \quad \forall f_1,f_2,g \in X$

$\boxed{\text{Def. 2}}$ Dato $(X, \langle\,,\,\rangle)$ sp. vett. con prod. scal. definiamo $\|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle}$

$\boxed{\text{Teorema 2}}$ La $\|\cdot\|$ definita in Def. 2 è sempre una norma.

$\boxed{\text{Teorema 1}}$ Dato $(X, \langle\,,\,\rangle)$, allora la $\|\cdot\|$ definita da Def. 2. soddisfa la disug. (Cauchy-Schwartz)

$$|\langle f,g\rangle| \leq \|f\|\cdot\|g\|$$

$\boxed{\text{Dim}}$ $\forall\lambda\in\mathbb{R} \quad \forall f,g\in X$

$$0 \leq \langle f+\lambda g, f+\lambda g\rangle =$$

$$= \langle f,f\rangle + \lambda^2\langle g,g\rangle + 2\lambda\langle f,g\rangle =$$

$$= \langle g,g\rangle\lambda^2 + 2\langle f,g\rangle\lambda + \langle f,f\rangle$$

$$4(\langle f,g\rangle)^2 - 4\overbrace{\underbrace{\langle g,g\rangle}\underbrace{\langle f,f\rangle}} \leq 0$$

$$\langle f,g\rangle^2 \leq \|g\|^2 \cdot \|f\|^2$$

$$\underbrace{|\langle f,g\rangle| \leq \|g\| \cdot \|f\|}$$

$\boxed{\text{Dim T.2}}$

1) $\|f\| \geq 0$ con "=" che vale solo per $f \equiv 0$

$\uparrow$

$\sqrt{\langle f,f\rangle}$ (Gratis perché $\langle\, , \rangle$ è prodotto scalare)

2) $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$

$\uparrow$

$$\sqrt{\langle \lambda f, \lambda f\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle f,f\rangle} =$$

$$= |\lambda| \cdot \sqrt{\langle f,f\rangle} = |\lambda| \cdot \|f\|$$

3) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (??)

$\Downarrow$

$$\|f+g\|^2 \le \left(\|f\|+\|g\|\right)^2 \quad (??)$$

$$\Updownarrow$$

$$(?) \quad \langle f+g, f+g \rangle \le \cancel{\|f\|^2} + \cancel{\|g\|^2} + 2\|f\|\|g\|$$

$$\updownarrow$$

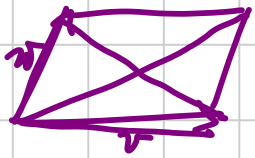
$$\cancel{\langle f,f \rangle} + \cancel{\langle g,g \rangle} + 2\langle f,g \rangle \quad \le \text{ per C.S.}$$

Def. 3 Dato $(X, \langle , \rangle)$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle , \rangle$, se X con tale norma è completo, si dice sp. di Hilbert.

Teorema (identità del parallelogramma)

Dato $(X, \langle , \rangle)$ e detta $\|\cdot\|$ norma indotta da $\langle , \rangle$, allora vale l'identità:

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\left(\|v\|^2 + \|w\|^2\right)$$



Dim

$$\|v+w\|^2+\|v-w\|^2=$$

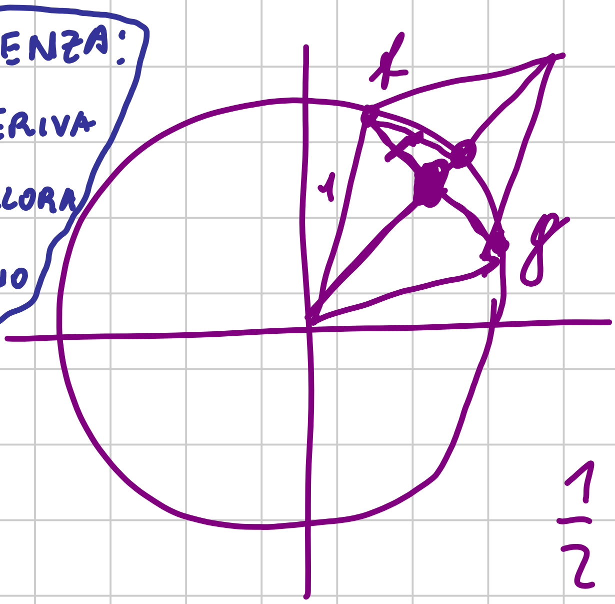
$$=\langle v+w,\, v+w\rangle+\langle v-w,\, v-w\rangle=$$

$$=\langle v,v\rangle+\langle w,w\rangle+\cancel{2\langle v,w\rangle}+$$

$$+\langle v,v\rangle+\langle w,w\rangle-\cancel{2\langle v,w\rangle}=$$

$$=2\|v\|^2+2\|w\|^2$$

CONSEGUENZA: SE $\|\cdots\|$ DERIVA DA $\langle\, ,\rangle$ ALLORA LE "PALLE" SONO "TONDE"



$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|<1$$

$$\frac{1}{2}\|f+g\| \overset{?}{<} 1$$

$$\underbrace{\|f+g\|^2}\overset{?}{<}\underbrace{2^2}$$

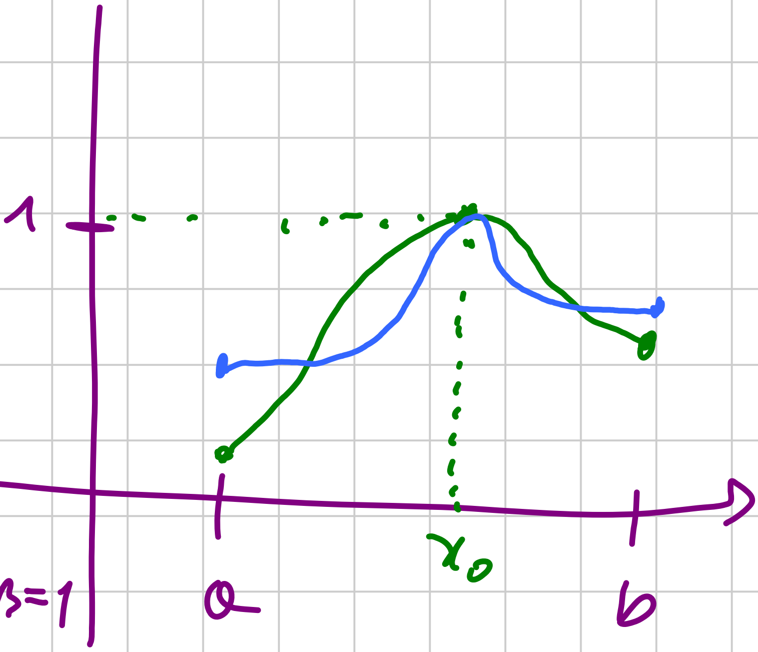
$$\underbrace{\|f+g\|^2}+\underbrace{\|f-g\|^2}_{>0}=\overbrace{2\big(\underbrace{\|f\|^2}_{1}+\underbrace{\|g\|^2}_{1}\big)}^{4}$$

$\boxed{\text{ES. 2}}$ In $C([a,b])$ la norma L^∞ non deriva da alcun prodotto scalare.

Perché basta prendere f, g in $B_1(0)$ e si ha:

$\alpha + \beta = 1$ e $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$

$\underbrace{\alpha f(x) + \beta g(x)} = h(x)$



$h(x_0) = \alpha f(x_0) + \beta g(x_0) = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 = \alpha + \beta = 1$

$h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) < \alpha + \beta = 1 \quad (\forall x \neq x_0)$

$\Rightarrow \|h(x)\|_{L^\infty} = 1 \Rightarrow$ Palla di raggio 1 non è "tonda"

$\Downarrow$

Non c'è alcun $\langle , \rangle$ che con $\|\cdot\|_\infty$ possa derivare.

Def. Dato $(X, \langle , \rangle)$ diremo che $f, g \in X$ sono perpendicolari se $\langle f, g \rangle = 0$.

Oss Dato $f \in X$ l'insieme

$$H = \{ g \in X \mid \langle g, f \rangle = 0 \} \text{ è}$$

un sottospazio.

Infatti $g_1, g_2 \in H \Rightarrow \alpha g_1 + \beta g_2 \in H$

perché

$$\langle \alpha g_1 + \beta g_2, f \rangle = \alpha \langle g_1, f \rangle + \beta \langle g_2, f \rangle =$$
$$= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 =$$
$$= 0$$

Oss. Dati $\{f_1, f_2, \dots f_n\}$ preso

$$H = \{ g \in X \mid \langle g, f_1 \rangle = 0, \dots \langle g, f_n \rangle = 0 \}$$

allora H è un sp. vettoriale

(è intersezione dei sp. perp. a ciascun f_i)

Def. Preso $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset X$

diremo che S è un insieme ortonormale

se $\forall i, j$ con $i \neq j$ $\langle e_i, e_j \rangle = 0$

e invece $\boxed{\forall i \ \langle e_i, e_i \rangle = 1}$

ES. $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx\}$

è insieme ortogonale in $C([-\pi, \pi])$

con $\langle , \rangle$ della norma L^2.

(A) $\forall k = 1, \dots, n$

$$\langle \sin kx, 1 \rangle = 0$$

$$\langle \cos kx, 1 \rangle = 0$$

(idem per coseno)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\, dx = 0$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

$$\begin{cases} \underbrace{\cos\alpha \cdot \cos\beta} = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right) \\ \sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right) \end{cases}$$

$$\underbrace{\langle \cos(kx), \cos(hx) \rangle} = 0 \quad (h \neq k)$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cdot \cos(hx)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\underbrace{\cos(kx+hx)} + \underbrace{\cos(kx-hx)} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos((k+h)x)} + \underbrace{\cos((k-h)x)}\, dx = 0$$

$\boxed{\text{PER CASA FINIRE CALCOLI:}}$

$\langle \sin(kx), \sin(hx) \rangle = 0$ se $k \neq h$

$\langle \sin(kx), \cos(hx) \rangle = 0$

[....]