Metodi Matematici - Lez. 5

Titolo nota

9 ottobre 2017 (14:00-15.45) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

(... continua da lez. scorsa)

T. di PITAGORA

Dati $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ sp. vett. con $\langle , \rangle$

se $\forall i,j$ con $i \neq j$ $v_i \perp v_j$ allora

$$\|v_1 + v_2 + \dots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \dots + \|v_n\|^2$$

DIM

Se sono 2

$$\|v_1 + v_2\|^2 = \langle v_1 + v_2, v_1 + v_2 \rangle =$$

$$= \langle v_1, v_1 \rangle + \langle v_2, v_2 \rangle + 2 \underbrace{\langle v_1, v_2 \rangle}_{\overset{v_1 \perp v_2}{=0}} =$$

$$= \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$$

Se sono n

$$\|v_1 + \dots + v_n\|^2 = \|v_1 + \dots + v_{n-1}\|^2 + \|v_n\|^2 =$$

$$= \dots = \|v_1\|^2 + \dots + \|v_n\|^2$$

T. della PROIEZIONE Sia $(V, \langle , \rangle)$ e $\|\cdot\|$ sia indotta da $\langle , \rangle$. Sia $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ un insieme ortonormale e sia V_n sp. di V generato da $\{v_1, \dots, v_n\}$ e sia $v \in V$.

Allora $\exists!\, w \in V_n$ t.c. $d(v, w)$ è minima in V_n.

Tale w ha inoltre le proprietà:

1) $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ dove $\alpha_i = \langle v, v_i \rangle$

2) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \leq \|v\|^2$ (dis. di Bessel)

$\boxed{\text{DIM}}$ preso $w = \sum \alpha_i v_i$ con $\alpha_i = \langle v, v_i \rangle$

Si ha $\langle w - v, v_j \rangle =$

$$= \langle w, v_j \rangle - \langle v, v_j \rangle =$$

$$= \langle \sum \alpha_i v_i, v_j \rangle - \langle v, v_j \rangle =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle$$

$$= \alpha_j - \alpha_j = 0$$

Quindi $(w - v) \perp V_n$

Mostriamo che tra gli elementi di V_n è quello che minimizza la distanza da v:

$\forall u \in V_n$ si ha.

APPLICO PITAGORA PERCHE $(w - u) \perp (v - w)$

$$\|v - u\|^2 = \|(v - w) + (w - u)\|^2 =$$

se $u \neq w$

$$= \|v - w\|^2 + \|w - u\|^2 >$$

$$> \|v - w\|^2$$

Mostriamo che $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 < \|v\|^2$ (se $v \notin V_n$)

T. Pitagora $\rightarrow$ (*)

$$= \langle w, w \rangle = \|w\|^2 = \|v\|^2 - \|v - w\|^2 < \|v\|^2$$

Perché $v_i \perp v_j$ se $i \neq j$

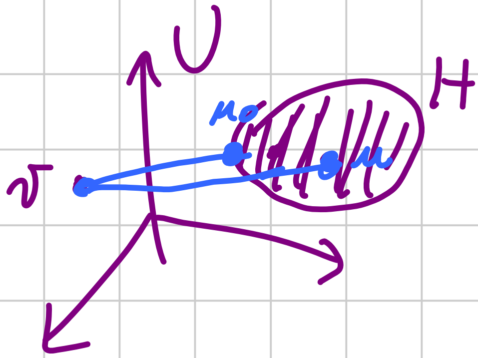
$$\langle \sum \alpha_i v_i, \sum \alpha_i v_i \rangle = \sum \alpha_i^2 \langle v_i, v_i \rangle = \sum \alpha_i^2$$

$(*)\quad \|v\|^2 = \|(v-w)+w\|^2 = \|v-w\|^2 + \|w\|^2$

Def Dato $(V, \|\ \|)$ sp. normato e dati

$v \in V$ e $H \subset V$ definiamo

$$d(v,H) = \inf_{u \in H} d(v,u)$$



ES. $C([-\pi,\pi])$ con $\|\cdot\|_2$

$$V_n = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(\sin kx)^2}{(\sqrt{\pi})^2}\, dx = \frac{1}{\pi}\overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx\, dx}^{=\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\underbrace{\cos 2kx}_{\int = 0}\right) dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\, dx = 1$$

Se $f \in C([-\pi, \pi])$

$$S_n(x) = \alpha_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + \beta_k \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right)$$

con $\alpha_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} \, dx$

$\beta_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \, dx$

$$\boxed{\alpha_0^2 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 + \beta_k^2 < \| f \|^2}$$

Caso $L^2([-\pi, \pi])$

cioè t.c. $f^{-1}(A)$ è misurabile $\forall A$ aperto

$$L^2([-\pi, \pi]) = \left\{ f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ misurabile e t.c. } \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx < +\infty \right\} \Big/ \sim$$

dove $f \sim g$ se $f(x) - g(x) = 0$ quasi ovunque

per tutti gli x tranne al più un insieme di misura nulla

Tale insieme con $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) \, dx$

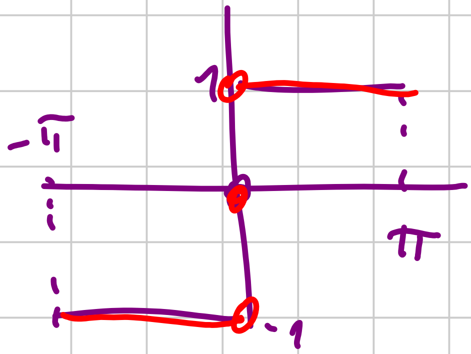
è ancora uno sp. vett. con $\langle \, , \, \rangle$ che è completo rispetto alla norma indotta da $\langle \, , \, \rangle$.

$\boxed{\text{Teorema}}$ $C([a,b])$ è denso in $L^2([a,b])$

S_1 $\left[\begin{array}{l}\text{Cioè } \forall f \in L^2([a,b]) \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists g \in C([a,b]) \\ \text{t.c. } \|f-g\|_2 < \varepsilon .\end{array}\right.$

S_2 $\left[\begin{array}{l}\text{Cioè (anche) } \forall f \in L^2([a,b]) \ \exists (g_n) \text{ in } C([a,b]) \\ \text{tale che } \|f-g_n\|_2 \to 0 .\end{array}\right.$

$f(x) = \operatorname{sgn}(x)$



$$\alpha_k = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}} \, dx = \dots = 0$$

$$\beta_n = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}} \, dx =$$

$$= 2 \, \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \frac{k \sin(kx)}{\sqrt{\pi}} \, dx = \frac{2}{k\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} \left(-\cos(kx)\right)' dx$$

$$= \frac{2}{k\sqrt{\pi}} \cdot \left(-\cos(k\pi) + \underbrace{\cos 0}_{1}\right) =$$

$$= \begin{cases} 2 \cdot \dfrac{2}{k\sqrt{\pi}} & k \text{ dispari} \\ 0 & k \text{ pari} \end{cases}$$

$$\beta_k = \frac{4}{k\sqrt{\pi}} \quad \text{solo con } k \text{ dispari}$$

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ dispari}}}^{n} \frac{4}{k\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} = \boxed{\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ dispari}}}^{n} \frac{4}{k\pi} \sin(kx)} =$$