Metodi Matematici - Lez. 6

Titolo nota

10 ottobre 2017 (9:30-11.15) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

$\boxed{\text{OSS.}}$

$\{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_n\}$ ortonormale, v da proiettare

proiezione $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \hat{v}_i$ con $\alpha_i = \langle v, \hat{v}_i \rangle$

— o —

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ortogonale, v da proiettare

proiezione $w = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$ $\quad \beta_i = \dfrac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2}$

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\beta_i \|v_i\|}_{= \left\langle v, \frac{v_i}{\|v_i\|} \right\rangle} \left(\frac{v_i}{\|v_i\|} \right)$$

$$\beta_i = \frac{1}{\|v_i\|} \left\langle v, \frac{v_i}{\|v_i\|} \right\rangle = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2}$$

Teorema (Conv. puntuale per serie di Fourier.)

Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo 2π t.c. $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ valga 1 delle seguenti proprietà:

1) f sia derivabile in x_0
2) f continua in x_0 ed esistano finite $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$
3) f ha disc. di tipo salto ma esistono finiti

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0}$$

Allora, detti

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx \end{aligned}\right\} k \geq 1$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} f(x)\, dx ,$$

posto $\boxed{S_n(x)} = \boxed{\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)}$

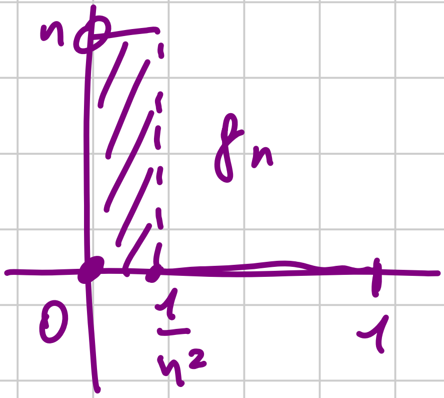
si ha $S_n(x) \xrightarrow{\text{puntualmente}} S(x)$

dove $S(x) = \dfrac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$

OSS. Però la convergenza puntuale non implica quella in L^2

$$\|g_n\|_2 = 1$$

$$g_n \to 0 \text{ puntualmente}$$



Def. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π, si dirà regolare a tratti se vale ciascuna di queste proprietà:

1) f è continua

2) $\exists^{\text{no}}$, in ciascun periodo, un numero finito di punti in cui f non è derivabile, ma in ogni intervallo delimitato da 2 di tali punti consecutivi f è di classe C^2.

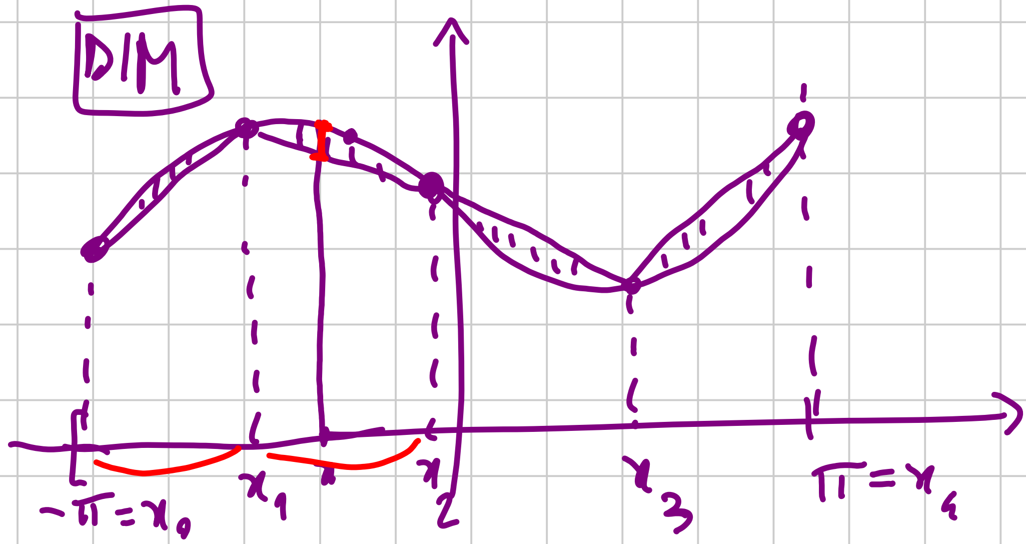
Teorema 2 Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo 2π e regolare a tratti, allora se $S_n(x)$ definita come nel Teorema 1, si ha

$$S_n(x) \to f(x) \quad \text{uniformemente}$$

cioè $\|S_n - f\|_\infty \to 0$

OSS. 1 Data $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ continua, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $g\, [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ lineare a tratti, t.c. $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$

DIM



$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x, x' \in [-\pi, \pi]$

se $|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$

Prendo partizione in modo che intervalli abbiano lunghezza $< \delta$.

Allora per ogni intervallo $I = [x_i, x_{i+1}]$ e per ogni $x \in I$ si ha:

$$|f(x) - g(x)| = |(f(x) - f(x_i)) + (\overbrace{f(x_i)}^{g(x_i)} - g(x))| \le$$

$$\le |f(x) - f(x_i)| + |g(x_i) - g(x)| \le$$

$$\leq |f(x) - f(x_i)| + |g(x_i) - g(x_{i+1})| \leq$$

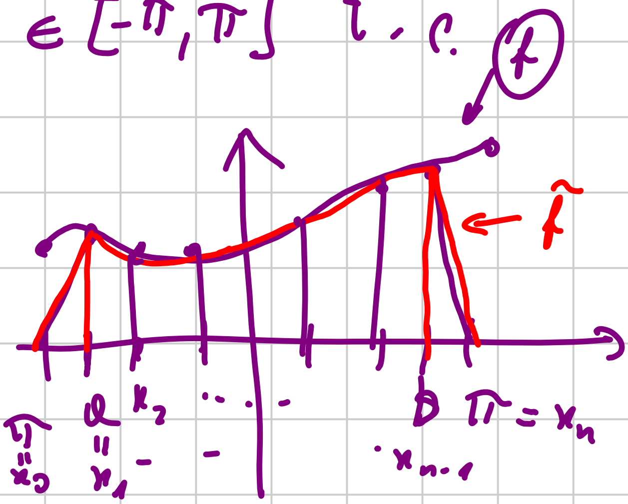
$$\leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x_{i+1})| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

OSS.2 Data $f:[-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ continua, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $g\ [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ lineare a tratti, e con $g(-\pi) = g(\pi)$ t.c. $\|f-g\|_2^2 < \varepsilon$

Dim $\forall \varepsilon > 0$ prendo $a, b \in [-\pi,\pi]$ t.c.

$$\int_{-\pi}^{a} \|f(x)\|_\infty^2 \, dx + \int_{b}^{\pi} \|f(x)\|_\infty^2 \, dx < \frac{\varepsilon}{2}$$



Posso farlo perché $|f|$ è limitata

Poi prendo $g:[-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ lineare a tratti t.c. $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ sia tale che $x_1 = a$ e $x_{n-1} = b$ e inoltre tale che $\|g - f\|_{L^2([a,b])}^2 < \frac{\varepsilon}{2}$

POSSO FARLO GRAZIE A OSS. 1

$$\| g - f \|^2_{L^2([-\pi,\pi])} = \int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - f(x)|^2 \, dx =$$

$$= \underbrace{\int_{-\pi}^{a} |f(x)-g(x)|^2 \, dx}_{} + \underbrace{\int_{a}^{b} |f(x)-g(x)|^2 \, dx}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\int_{b}^{\pi} |f(x)-g(x)|^2 \, dx}_{} \leq$$

0

$\leq \frac{\varepsilon}{2}$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\boxed{\text{OSS. 3}}$ Prolungando la g dell'oss. 2 per periodicità si ottiene una f. continua su tutto $\mathbb{R}$ grazie al fatto che $g(-\pi) = g(\pi)$.

Quindi a tale g si può applicare il $\boxed{\text{T. 2}}$.

$\boxed{\text{Conclusione}}$ Data $f \in L^2([-\pi,\pi])$, $\forall \varepsilon > 0$ prendo $h \in C([-\pi,\pi])$ t.c. $\| f - h \|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{3}$ (posso farlo perché $C([-\pi,\pi])$ so che è denso in $L^2([-\pi,\pi])$)

Poi prendo $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ lineare a tratti e tale che $g(-\pi) = g(\pi)$ tale che $\|g - h\|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{3}$

Infine, poiché g prolungata per continuità soddisfa il T.2, posso prendere un pol. Trigonometrico $S_n(x)$ t.c. $\|S_n - g\|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{3}$

Di conseguenza

$$\|S_n(x) - f\|_2 \leq \|S_n(x) - g\|_2 + \|g - h\|_2 + \|h - f\|_2 \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Quindi se esiste un pol. trigonometrico che dista da f meno di ε nella norma L^2

a maggior ragione il polinomio trig. (dello stesso ordine) ottenuto proiettando la f ha distanza da f meno di ε.

Questo significa che la serie di Fourier di f, se $f \in L^2$, converge a f nella norma L^2.