Metodi Matematici - Lez. 8

Titolo nota

17 ottobre 2017 (9:30-11.15) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

BASI DI HILBERT

$\boxed{\text{Def.}}$ Sia $(V, \langle , \rangle)$ uno spazio di Hilbert

e $B = \{e_0, e_1, \dots, e_n, \dots\}$

un insieme ortonormale, diremo che B è una base di Hilbert per V se

$\forall f \in V \quad \exists$ succ. (a_n) t.c.

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e_n$ converge a f.

$\mathbb{R}^n$ con $\langle , \rangle$ che dà $\| \ \|$ euclidea

$\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$

$\bar{b} = (b_1, \dots, b_n)$

$\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$

$\boxed{\text{ES. 12 LISTA 2}}$ Se prendo ℓ^2

$\bar{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$

$$\bar{b} = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$$

$$\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \dots + a_n b_n + \dots$$

in generale non è finito il prodotto $\forall \bar{a}, \bar{b}$

quindi do la seguente definizione:

$\boxed{\text{Def. 1}}$ $\ell_2 = \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 < +\infty \right\}$

e $\forall\, \bar{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\bar{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

definiamo $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$

$\boxed{\text{OSS1}}$ Si ricorda $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ converge perché:

$$0 < |a_n b_n| \leq \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

Quindi $\sum |a_n b_n|$ converge per cr. confronto

e quindi $\sum a_n b_n$ converge per cr. ass. convergenza

$\boxed{\text{OSS2}}$ $\langle\, , \,\rangle$ è prod. scalare:

1) $\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle \geq 0$ e "=" vale solo se $\bar{a} = \bar{0}$
(ovvio)

2) $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = \langle \bar{b}, \bar{a} \rangle$ (ovvio)

3) $\langle \bar{a}, \alpha \bar{b} \rangle = \alpha \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \cdot \alpha b_i = \alpha \sum_{i=0}^{+\infty} a_i b_i}$$

4) $\langle \bar{a}, \bar{b} + \bar{c} \rangle = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle + \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{+\infty} a_i (b_i + c_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i b_i + \sum_{i=0}^{+\infty} a_i c_i}$$

Quindi $(\ell_2, \langle , \rangle)$ è uno sp. con prod. scalare, per mostrare che è di Hilbert bisogna mostrare che è completo.

$\boxed{\text{Lemma}}$ Dato $(V, \|\cdot\|)$ sp. normato sia (f_n) una succ. di Cauchy in $(V, \|\cdot\|)$.

Allora $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|f_n\| < M$

$\boxed{\text{Dim}}$ Poiché (f_n) è di Cauchy si ha

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n, m \geq n_0 \quad \|f_n - f_m\| < \varepsilon$

In particolare ciò vale per $\varepsilon = 1$.

Quindi, preso n_0 t.c. ciò valga per $\varepsilon = 1$ avremo

$$\|f_{n_0} - f_n\| < 1$$

per ogni $n \geq n_0$, quindi, per ogni $n \geq n_0$ si ha

$$\|f_n\| = \|f_n - f_{n_0} + f_{n_0}\| \leq$$

$$\leq \|f_n - f_{n_0}\| + \|f_{n_0}\| \leq$$

$$\leq 1 + \|f_{n_0}\|$$

Definiamo $M = \max\{\|f_0\|, \|f_1\|, \dots, \|f_{n_0-1}\|, \|f_{n_0}\| + 1\}$

Con tale scelta di M si ha $\|f_n\| \leq M$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Mostriamo ora che se $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una succ. di Cauchy in ℓ^2 allora $\exists X \in \ell^2$ t.c. $X_n \xrightarrow{\ell^2} X$.

$$X_1 = (a_0^1, a_1^1, a_2^1, \dots, a_k^1, \dots)$$
$$X_2 = (a_0^2, a_1^2, a_2^2, \dots, a_k^2, \dots)$$
$$\vdots$$
$$X_n = (a_0^n, a_1^n, a_2^n, \dots, a_k^n, \dots)$$
$$\vdots$$

$$X = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots)$$

Per definire X mostriamo che $\forall k \in \mathbb{N}$ $(a_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy; infatti:

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n,m \geq n_0$ $\boxed{\| X_n - X_m \| < \varepsilon}$

Oss: $|a_k^n - a_k^m| \leq \| X_n - X_m \|$

$$\sqrt{(a_k^n - a_k^m)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} (a_k^n - a_k^m)^2}$$
$$\shortparallel$$
$$|a_k^n - a_k^m|$$

$\boxed{|a_k^m - a_k^n| < \varepsilon}$ $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}}$

Quindi $\forall k \in \mathbb{N}$ $(a_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ è succ. di Cauchy in $\mathbb{R}$ e quindi $\boxed{\text{Poichè } \mathbb{R} \text{ è completo}}$ converge a limite finito che indico con a_k. $\left(\text{cioè } a_k = \lim_{n\to+\infty} a_k^n\right)$

Detta $X = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots\dots)$

dobbiamo mostrare 1) $X \in \ell^2$

2) $X_n \xrightarrow{\ell_2} X$

$\boxed{\text{Mostriamo 1}}$

Basta mostrare che $\sum_{k=0}^{+\infty} (a_k)^2 < +\infty$

Sia M la costante t.c. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ \|X_n\| \leq M}$

(so che c'è perchè X_n è di Cauchy)

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k^n)^2 \leq M^2}$$

STESSA COSA

Basterà mostrare che anche

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (a_k)^2 \leq M^2$$

Ma per mostrare ciò basta mostrare

$\forall p \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{p} (a_k)^2 \leq M^2$

ma ciò è vero perché

$$\sum_{k=0}^{p} (a_k)^2 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{p} (a_k^n)^2$$

sono tutte $\leq M^2$ perché somme finite delle X_n

Per i teoremi su somme di limiti

Quindi $X \in \ell^2$.

Mostriamo che $X_n \to X$.

Basta mostrare che $\forall \varepsilon > 0$ def. in n $\|X - X_n\| \leq \varepsilon$

Prendiamo n_0 t.c. $\forall n, m \geq n_0$ si abbia $\|X_m - X_n\| \leq \varepsilon$

(posso farlo perché (X_n) è di Cauchy)

Voglio mostrare che se $n \geq n_0$ anche $\|X - X_n\|^2 \leq \varepsilon^2$

Si ha:

$$\|X - X_n\|^2 = \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=0}^{p} (a_k - a_k^n)^2 \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

(3) (2)

$$\sum_{k=0}^{p} (a_k^m - a_k^n)^2$$

(1)

per $m \to +\infty$

$① \leq \varepsilon^2 \quad \forall m \geq n_0 \quad \forall p \in \mathbb{N}$

$② \leq \varepsilon^2 \quad \forall p \in \mathbb{N}$ perché è $\lim_{m \to +\infty} ①$

$③ \leq \varepsilon^2$ perché $\lim_{p \to +\infty} ②$

Quindi abbiamo mostrato che $\forall \varepsilon > 0$ fissiamo,

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $n \geq n_0 \quad \|x_n - x\| \leq \varepsilon$

Quindi $x_n \xrightarrow{\ell^2} x$.

$\boxed{\text{Per casa}}$ Verificare che la palla chiusa di raggio 1 di ℓ^2 è chiusa e limitata ma non compatta.