Metodi Matematici - Lez. 9

Titolo nota

23 ottobre 2017 (14:00-15.45) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

EQ. DELLE ONDE

$$(*)\quad \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(0,x) = f(x) \in C^2([0,L]) \\ u_t(0,x) = g(x) \in C^1([0,L]) \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \end{cases}$$

$u : [0,L] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

con $f(0) = g(0) = f(L) = g(L) = 0$

$$\boxed{u(t,x) = \overbrace{X(x) \cdot T(t)}^{X=?\ T=?}}$$

$$u_t(t,x) = X(x) \cdot T'(t) \qquad u_x(t,x) = X'(x) \cdot T(t)$$

$$u_{tt}(t,x) = X(x) \cdot T''(t) \qquad u_{xx}(t,x) = X''(x) \cdot T(t)$$

$$X(x) \cdot T''(t) = c^2 X''(x) \cdot T(t)$$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)}$$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = kc^2 \qquad \frac{X''(x)}{X(x)} = k$$

$$T''(t) - kc^2 T(t) = 0 \qquad X''(x) - kX(x) = 0$$

$u(0,0) = u(0,L) = 0$

$$(*)\begin{cases} X''(x) - kX(x) = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \qquad X(x) \equiv 0$$

$(\circledast)$

Sol. generale di $(*)$ è data da:

$\lambda^2 - k = 0$ $\qquad \boxed{k>0}$ $\quad \lambda = \pm\sqrt{k}$

$$X(x) = \alpha e^{\sqrt{k}x} + \beta e^{-\sqrt{k}x} \equiv 0$$

$$\begin{cases} X(0)=0 \Rightarrow \\ X(L)=0 \Rightarrow \end{cases} \left.\begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \alpha e^{\sqrt{k}L} + \beta e^{-\sqrt{k}L} = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \alpha=\beta=0$$

$\boxed{k=0}$ $\qquad \lambda^2 = 0$

$$X(x) = \alpha + \beta x \equiv 0$$

$X(0)=0$

$X(L)=0$ $\Rightarrow$ $\Downarrow$

$\alpha=\beta=0$

$\boxed{k<0} \Rightarrow -k = \omega^2$

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

$$\lambda = \pm i\omega$$

$$X(x) = \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$$

$X(0) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

$$X(L)=0 \Rightarrow \beta \sin(\omega L)=0$$

se $\boxed{\omega L = n\pi}$ $\qquad \boxed{\omega^2=-k}$

$\exists$ sol. di $(*)$ non identicamente nulla se e solo se $\omega = \frac{n\pi}{L}$ cioè $\boxed{-k}=\boxed{\frac{n^2\pi^2}{L^2}}$

con $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ data da

$$\boxed{X(x) = B\sin(\omega x)} \qquad X_n(x)=B\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\frac{n\pi}{L}$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ cerchiamo la sol. di

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -c^2\cdot\frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

$$T''(t) + c^2\frac{n^2\pi^2}{L^2}T(t) = 0$$

$$\lambda^2 + c^2\frac{n^2\pi^2}{L^2} = 0$$

$$\lambda = \pm i\frac{cn\pi}{L}$$

$$T(t) = \alpha\cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + \beta\sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)$$

$$u_n(t,x) = B \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cdot\left(\alpha \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + \beta \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right)$$

$$u_n(t,x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(\alpha \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + \beta \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right)$$

$$(\square) \quad u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(\alpha_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + \beta_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right)$$

Notiamo che se si scelgono α_n e β_n in modo tale che $(\square)$ converga allora, dal fatto che l'equazione è lineare e che ciascun termine della serie la soddisfa, segue che anche la serie soddisfa l'equazione.

Cerco ora α_n e β_n in modo da soddisfare anche dati iniziali, in questo modo:

$$\underbrace{u(0,x) = f(x)}$$

$$\updownarrow$$

$$f(x) = u(0,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \leftarrow$$

Devo trovare α_n in modo che valga questo se voglio soddisfare il primo dato iniziale

A tale scopo prendo $f(x)$ e la prolungo per disparità a $[-L,L]$, allora la sua serie di Fourier è

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \right)$$

$$a_0 = 0 \qquad a_n = 0$$ (perché f è prol. per dispari)

$$\boxed{b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx}$$

Quindi nella ($\square$), perché sia soddisfatto il I° dato iniziale, basta scegliere $\boxed{\alpha_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx}$

Scegliamo ora β_n in ($\square$) in modo che valga anche $u_t(0,x) = g(x)$.

$$(\square) \quad u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \left(\alpha_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L} t\right) + \beta_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L} t\right) \right)$$

$$u_t(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \left(-\alpha_n \frac{cn\pi}{L} \sin\left(\frac{cn\pi}{L} t\right) + \beta_n \frac{cn\pi}{L} \cdot \cos\left(\frac{cn\pi}{L} t\right) \right)$$

$$g(x) = u_t(0,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \frac{cn\pi}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

prolungando per dispari $g(x)$ a $[-L, L]$ e facendone serie di Fourier si ottiene:

$$g(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad \text{dove} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

Quindi basta scegliere β_n in modo che

$$\beta_n \frac{cn\pi}{\cancel{L}} = \frac{2}{\cancel{L}} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

cioè

$$\boxed{\beta_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx}$$

$$(\square) \quad u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)\left(\alpha_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L} t\right) + \beta_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L} t\right)\right)$$

UNICITÀ

Date due sol. $u_1(t,x)$ e $u_2(t,x)$ dello stesso P.B. di Cauchy $(\ast)$ la loro differenza $v(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$ deve soddisfare

$$(\Delta) \begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{xx} \\ v(0,x) \equiv 0 \\ v_t(0,x) \equiv 0 \end{cases}$$

Quindi per avere unicità basta mostrare che ogni soluzione di (Δ) deve essere identicamente nulla.

Definiamo

$$E(t) = \int_0^L (v_t^2 + c^2 v_x^2)\, dx$$

integrando per parti $\int v_x v_{xt}$

Si ha:

$$E'(t) = \int_0^L \left(2v_{tt}\cdot v_t + c^2\cdot 2v_x\cdot v_{xt}\right) dx =$$

$$= \int_0^L \left(2v_{tt}\cdot v_t - c^2\, 2v_{xx}\, v_t\right) dx =$$

perché v è sol. di eq. onde

$$= \int_0^L 2v_t \overbrace{\left(v_{tt} - c^2 v_{xx}\right)}^{=0} dx =$$

$$= \int_0^L 2v_t\cdot 0\, dx = 0$$

Quindi $\forall t \in \mathbb{R}^+$ $E(t) = E(0) = 0$

$$\boxed{E(t) = \int_0^L \left(v_t^2 + c^2 v_x^2\right) dx = 0}$$

$\Downarrow$

$v_t(x,t)$ e $v_x(x,t)$ ident. nulle

$\Downarrow$

$\boxed{v(x,t) \text{ costante}}$

$\Downarrow$

$$v(x,t) \equiv 0$$