Metodi Matematici - Lez. 11

Titolo nota

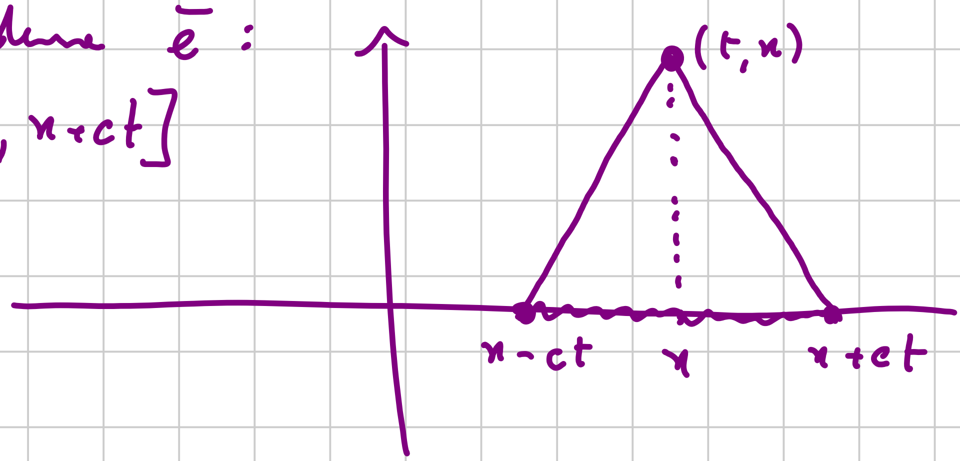
30 ottobre 2017 (14:00-15.45) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

CONSEGUENZE Formula Esplicita

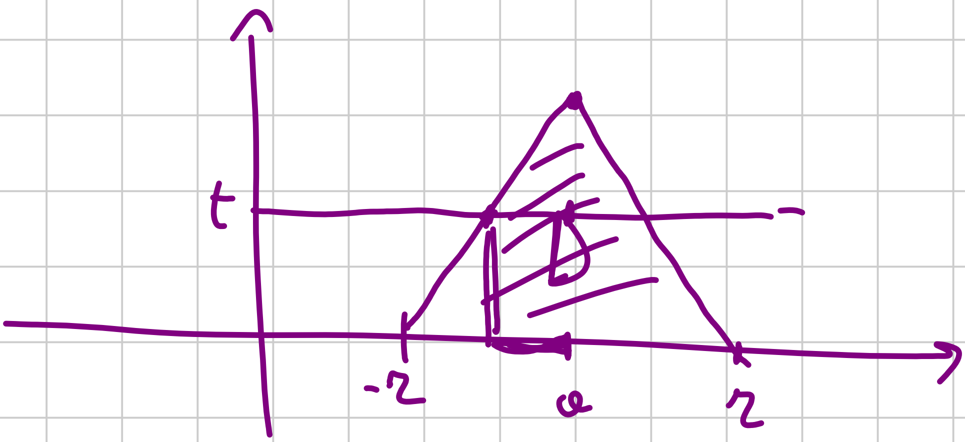
$$u(t,x) = \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy$$

1) $\boxed{\text{Dominio di dipendenza}}$

Dato $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ il suo dominio di dipendenza è:
$[x-ct, x+ct]$

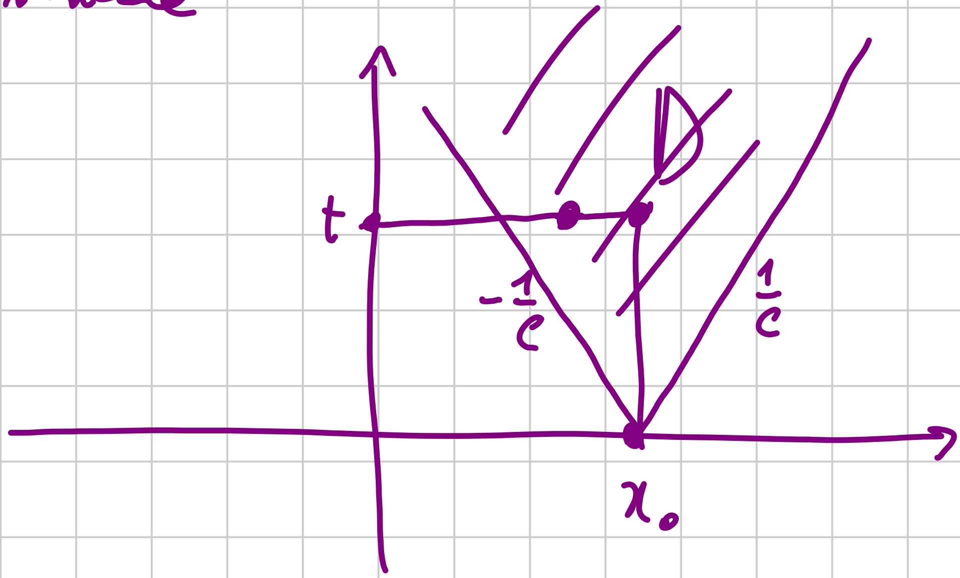


2) Dominio di determinazione di $[a-r, a+r]$ è



$$D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mid |x-a| + ct \le r\}$$

3) Dato $x \in \mathbb{R}$ definiamo dominio di influenza di x_0 l'insieme



$$D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mid |x - x_0| \leq ct\}$$

$\boxed{4}$ $\boxed{\text{Dipendenza continua dai dati}}$

L^1_{loc}

Se $g_n \xrightarrow{L^\infty} g$ e $f_n \xrightarrow{L^\infty} f$ allora detta

$u(t,x)$ la sol. di $\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(0,x) = f(x) \\ u_t(0,x) = g(x) \end{cases}$

e $\forall n \in \mathbb{N}$

$u_n(t,x)$ la sol. di $\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(0,x) = f_n(x) \\ u_t(0,x) = g_n(x) \end{cases}$

Allora $u_n \xrightarrow{L^\infty([0,T] \times \mathbb{R})} u$

$\boxed{\text{Dim}}$

$$\left(\|f_n - f\|_\infty = \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(y) - f_n(y)| \right.$$

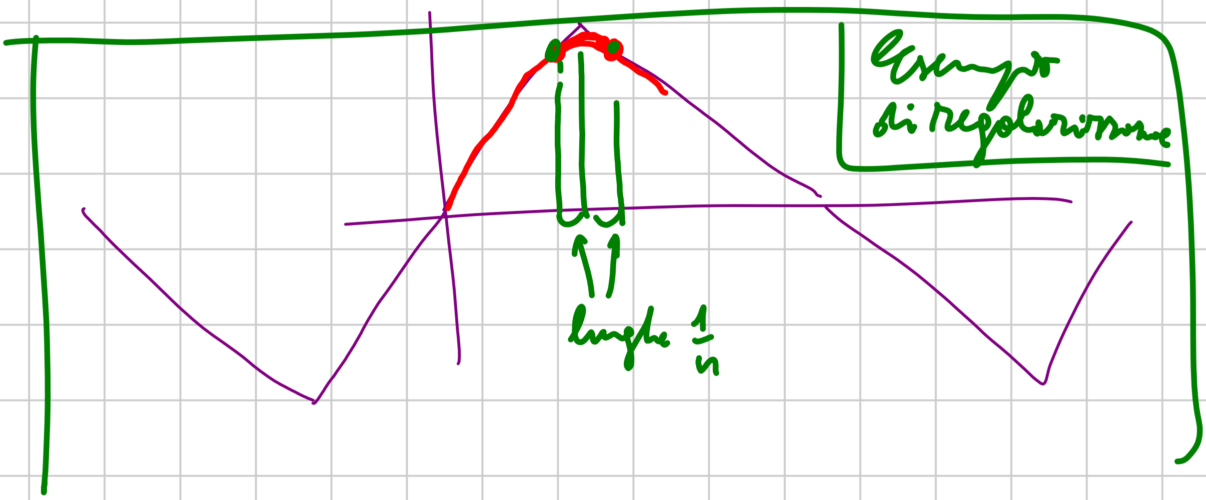
$$|u_n(t,x) - u(t,x)| =$$

$$\leq \left| \frac{(f_n(x+ct) - f(x+ct)) + (f_n(x-ct) - f(x-ct))}{2} \right| + \left| \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g_n(y) - g(y) \, dy \right| \leq$$

$$\leq \frac{\|f_n - f\|_\infty + \|f_n - f\|_\infty}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \overbrace{|g_n(y) - g(y)|}^{\leq \|g_n - g\|_\infty} \, dy \leq$$

$$\leq \|f_n - f\|_\infty + \frac{1}{\cancel{2c}} \cdot \|g_n - g\|_\infty \cdot \cancel{2c} \cdot t$$

$$0 \leq \underbrace{\|u_n - u\|_{L^\infty([0,T] \times \mathbb{R})}}_{\downarrow \, 0} \leq \underbrace{\|f_n - f\|_\infty + T \cdot \|g_n - g\|_\infty}_{\downarrow \, 0}$$



CASO NON OMOGENEO

$$(1)\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(t,x) & (t,x)\in \mathbb{R}^+ \times [0,L] \\ u(0,x) = f(x) \in C^2([0,L]) \\ u_t(0,x) = g(x) \in C^1([0,L]) \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \end{cases}$$

(cond. di compatibilità f, g nulle in 0 e L)

Basta saper risolvere (1) con $f(x)$ e $g(x)$ identicamente nulli perché se prendiamo

$v(t,x)$ risolve $\begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{xx} \\ v(0,x) = f(x) \\ v_t(0,x) = g(x) \end{cases}$

e

$w(t,x)$ risolve $\begin{cases} w_{tt} = c^2 w_{xx} + f(t,x) \\ w(0,x) = 0 \\ w_t(0,x) = 0 \end{cases}$

allora posto $u(t,x) = v(t,x) + w(t,x)$, si ha che

$u(t,x)$ risolve (1).

Infatti

$u(0,x) = v(0,x) + w(0,x) = f(x) + 0 = f(x)$

$$u_t(0,x) = v_t(0,x) + w_t(0,x) = g(x) + 0 = g(x)$$

$$u_{tt}(t,x) = \big(v(t,x) + w(t,x)\big)_{tt} = v_{tt}(t,x) + w_{tt}(t,x) =$$

$$= \boxed{c^2 v_{xx}(t,x) + c^2 w_{xx}(t,x)} + f(t,x) =$$

$$\boxed{c^2 \big(v(t,x) + w(t,x)\big)_{xx}}$$

$$= c^2 u_{xx}(t,x) + f(t,x)$$

Quindi risolviamo:

$$\begin{cases} w_{tt} = c^2 w_{xx} + f(t,x) \\ w(0,x) = 0 \\ w_t(0,x) = 0 \end{cases}$$

Per ogni fissato $t \geq 0$ prolunghiamo $f(t,x)$ per disparità a tutto $[-L, L]$ e troviamo la sua serie di Fourier:

$$f(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

$$w_{tt}(t,x) = c^2 w_{xx}(t,x) + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Cerco soluzione della forma

$$w(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$w_{tt}(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n''(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$w_{xx}(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n(t) \cdot \left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right)$$

Quindi cerchiamo $w_n(t)$ in modo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_n''(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{n^2\pi^2c^2}{L^2} w_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

cioè in modo che:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(w_n''(t) + \frac{n^2\pi^2c^2}{L^2} w_n(t) - f_n(t)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = 0$$

Quindi basta risolvere $\forall n \in \mathbb{N}-\{0\}$ l'equazione

$$(2) \begin{cases} w_n''(t) + \underbrace{\boxed{\frac{n^2\pi^2c^2}{L^2}}}_{\omega_n^2} w_n(t) = f_n(t) \\ w_n(0) = 0 \\ w_n'(0) = 0 \end{cases}$$

Uso il metodo della variaz. delle costanti per risolvere (2), cioè cerco sol. del tipo

$$Y_n(t) = A(t)\cos(\omega_n t) + B(t)\sin(\omega_n t)$$

$$Y_n'(t) = \boxed{A'(t)\cos(\omega_n t) + B'(t)\sin(\omega_n t)} +$$

$$- A(t)\,\omega_n \sin(\omega_n t) + B(t)\,\omega_n \cos(\omega_n t)$$

cerco $A(t)$ e $B(t)$ in modo che soddisfino l'ulteriore condizione $\boxed{} = 0$; per tali $A(t)$ e $B(t)$ si ha:

$$Y_n''(t) = - A'(t)\,\omega_n \sin(\omega_n t) + B'(t)\,\omega_n \cos(\omega_n t) -$$

$$- A(t)\,\omega_n^2 \cos(\omega_n t) - B(t)\,\omega_n^2 \sin(\omega_n t)$$

Sostituendo Y_n e Y_n'' in (2) si ha:

$$\begin{cases} -A'\omega_n \sin(\omega_n t) + B'\omega_n \cos(\omega_n t) \cancel{- A\omega_n^2 \cos(\omega_n t)} \cancel{- B\omega_n^2 \sin(\omega_n t)} \\ + \omega_n^2\left(\cancel{A\cos\omega_n t} + \cancel{B\sin\omega_n t}\right) = f_n(t) \\ A'\cos(\omega_n t) + B'\sin(\omega_n t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -A'\sin(\omega_n t) + B'\cos(\omega_n t) = \frac{1}{\omega} f_n(t) \\ A'\cos(\omega_n t) + B'\sin(\omega_n t) = 0 \end{cases}$$

$A' = \ldots$

$B' = \ldots$ e integrare

$A(t) = \ldots$

$B(t) = \ldots$

costanti di integrazione vengono 0 grazie a stato iniziale

(CONTINUA SU LEZ. 12)