Metodi Matematici - Lez. 12

31 ottobre 2017 (14:00-15.45) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

... [CONTINUA DA LEZ. PRECEDENTE]

$$
\begin{cases}
-A' \sin(\omega_n t) + B' \cos(\omega_n t) = \frac{1}{\omega_n} f_n(t) \\
A' \cos(\omega_n t) + B' \sin(\omega_n t) = 0
\end{cases}
$$

$$
A' = -\frac{\sin(\omega_n t)}{\cos(\omega_n t)} B'
$$

$$
B' \left(\frac{\sin^2(\omega_n t)}{\cos(\omega_n t)} + \cos(\omega_n t) \right) = \frac{1}{\omega_n} f_n(t)
$$

$$
\begin{cases}
B'(t) = \frac{1}{\omega_n} \cos(\omega_n t) f_n(t) \\
A'(t) = -\frac{1}{\omega_n} \sin(\omega_n t) f_n(t)
\end{cases}
$$

$$
\rightarrow B(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \cos(\omega_n \tau) f_n(\tau)\, d\tau
$$

$$
\rightarrow A(t) = -\frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sin(\omega_n \tau) f_n(\tau)\, d\tau
$$

Quindi nella $Y_n(t)$ devo mettere gli $A(t)$ e $B(t)$ trovati:

$$Y_n(t)=A(t)\cos(\omega_n t)+B(t)\sin(\omega_n t)=$$

$$=-\frac{1}{\omega_n}\left(\int_0^t \sin(\omega_n \tau) f_n(\tau)\,d\tau\right)\cos(\omega_n t)+$$

$$+\frac{1}{\omega_n}\left(\int_0^t \cos(\omega_n \tau) f_n(\tau)\,d\tau\right)\sin(\omega_n t)=$$

$$=\frac{1}{\omega_n}\int_0^t \left(\cos(\omega_n \tau)\sin(\omega_n t)-\sin(\omega_n \tau)\cos(\omega_n t)\right) f_n(\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{\omega_n}\int_0^t \sin(\omega_n t-\omega_n \tau) f_n(\tau)\,d\tau=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{\omega_n}\int_0^t \sin(\omega_n(t-\tau)) f_n(\tau)\,d\tau}_{w_n(t)} \quad (*)$$

Quindi la sol. dell'eq. delle onde non omogenea è data da

$$w(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty} w_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

dove $w_n(t)$ è data da $(*)$

nel quale $f_n(t)$ è definita da:

$$f(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

ALTRO MODO DI PROCEDERE

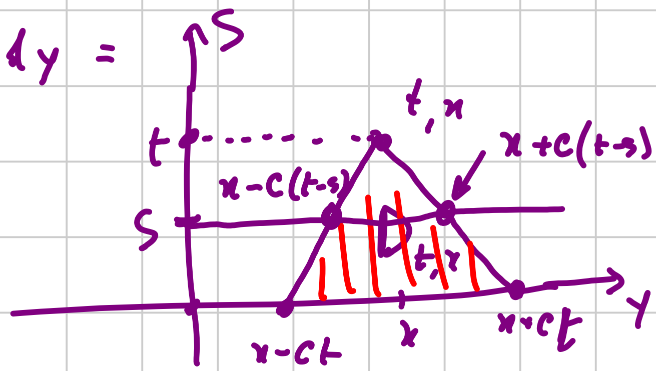
Dato il P.B. di Cauchy non omogeneo

$$(\circledast)\quad \begin{cases} u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) + F(t,x) \\ u(0,x) = 0 \\ u_t(0,x) = 0 \end{cases}$$

dove $F(t,x) \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$

la sua soluzione $u(t,x)$ è data da:

$$(*)\quad u(t,x) = \frac{1}{2c}\int_{D_{t,x}} F(s,y)\,ds\,dy =$$



ds

DIM Dobbiamo solo verificare che la $(*)$ soddisfa $(\circledast)$

$$u(t,x) = \frac{1}{2c}\int_{D_{t,x}} F(s,y)\,ds\,dy = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(s,y)\,dy\,ds$$

$$u_x(t,x) = \frac{1}{2c}\int_0^t \Big(F(s, x+c(t-s)) - F(s, x-c(t-s))\Big)\,ds =$$

$$u_{xx}(t,x) = \boxed{\frac{1}{2c}\int_0^t F_x(s, x+c(t-s)) - F_x(s, x-c(t-s))\,ds}$$

$$u_t(t,x) = \frac{1}{2c}\int_{x-c(t-t)}^{x+c(t-t)} F(t,y)\,dy + \frac{1}{2\cancel{c}}\int_0^t \cancel{c}\,F(s,x+c(t-s)) + \cancel{c}\,F(s,x-c(t-s))\,ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \Big(F(s,x+c(t-s)) + F(s,x-c(t-s))\Big)\,ds$$

$$u_{tt}(t,x) = \frac{1}{2}\Big(F(t,x+c(t-t)) + F(t,x-c(t-t))\Big) +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^t c\Big(F_x(s,x+c(t-s)) - F_x(s,x-c(t-s))\Big)\,ds$$

$$= \boxed{F(t,x) + \frac{c}{2}\int_0^t F_x(s,x+c(t-s)) - F_x(s,x-c(t-s))\,ds}$$

$$= F(t,x) + c^2 u_{xx}(t,x)$$

$$u_{xx}(t,x) = \boxed{\frac{1}{2c}\int_0^t F_x(s,x+c(t-s)) - F_x(s,x-c(t-s))\,ds}$$

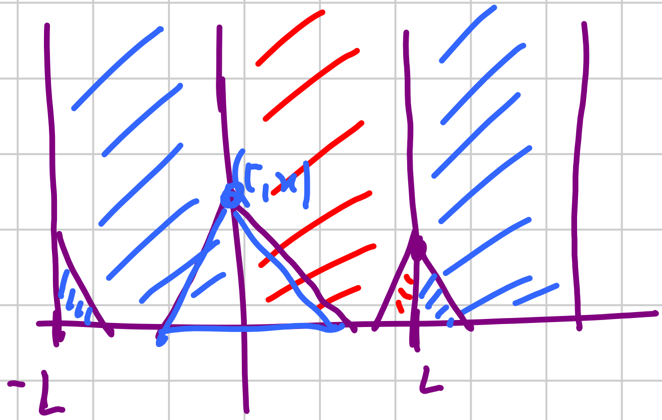
Come ricondurre eq. non omogenee in $\mathbb{R}^+\times[0,L]$ a quelle in $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$.

Prendo $F(t,x)$ t.c. $F(t,0) = F(t,L) = 0 \quad \forall t\geq 0$
la prolungo per disparità nella var. x in $\mathbb{R}^+\times[-L,L]$ e poi per periodicità (di periodo $2L$) nella variabile x a tutto $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$

La sol. trovata è

$$u(t,x) = \int_{D_{t,x}} F(s,y)\, ds\, dy$$

sfrutto disparità e periodicità $\rightarrow$ $\Downarrow$



$$u(t,0) = u(t,L) = 0$$

$$\forall t \geq 0$$