Metodi Matematici - Lez. 13

Titolo nota

6 novembre 2017 (14:00-15:45) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

EQUAZIONE DEL CALORE

$$\begin{cases} u_t(t,x) = a^2 u_{xx}(t,x) & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times [0,L] \\ u(0,x) = g(x) \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \quad \leftarrow (*) \end{cases}$$

Cerchiamo $u(t,x) = X(x) \cdot T(t)$

$$u_t = X(x) \cdot T'(t)$$

$$u_{xx} = X''(x) \cdot T(t)$$

$$X(x) \cdot T'(t) = a^2 X''(x) \cdot T(t)$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = a^2 \frac{X''(x)}{X(x)} \Rightarrow$$ entrambe uguali a stessa costante $K a^2$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = K$$

$$X''(x) = K X(x)$$

Da $(*)$ segue che
$X(0) = X(L) = 0$

$$\lambda^2 - K = 0$$

$-K = \omega^2$ ($-K$ deve essere positivo (vedi volte scorse))

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

$\cancel{\cos(\omega x)}$

$\sin(\omega x)$

$\omega = \frac{n\pi}{L}$

$$\boxed{X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$$

Per tali valori di k, cerchiamo ora $T_n(t)$ che risolve

$$\frac{T_n'(t)}{T_n(t)} = -a^2 \frac{n^2\pi^2}{L^2} \qquad T' + \bigcirc\, T = 0$$

$$T_n(t) = e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

$\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ ho trovato la sol.

$$u_n(t,x) = T_n(t) \cdot X_n(x) =$$

$$= \underline{e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$$

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k u_k(t,x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e^{-\frac{a^2 k^2 \pi^2}{L^2} t} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

$$(*) \quad g(x) = u(0,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k u_k(0,x) = $$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

Quindi, perché valga $(*)$, basta scegliere gli α_n come i coeff. di Fourier di $g(x)$ prolungata per disparità a $[-L, L]$.

$\boxed{\text{Serie fourier} \longrightarrow \text{Trasformata fourier.}}$

$f(x)$ su $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ $\qquad f(x) = \lim_{n \to +\infty} S_n(x)$

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{T} x\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{T} x\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{T} t\right) \cos\left(\frac{2k\pi}{T} x\right) + \sin\left(\frac{2k\pi}{T} t\right) \sin\left(\frac{2k\pi}{T} x\right)\right) dt =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{2\pi}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos\left(\frac{2k\pi}{T} (x-t)\right) dt = \qquad \boxed{\text{Pongo } \omega = \frac{2\pi}{T}}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \omega \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \overbrace{\cos(k\omega(x-t))}^{(*)} dt =$$

$$(*) \quad \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \omega \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \left(e^{ik\omega(x-t)} + e^{-ik\omega(x-t)} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \omega \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, \overbrace{e^{ik\omega(x-t)}}^{e^{ik\omega x} \cdot e^{-ik\omega t}}\, dt =$$

Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è a supp. compatto e T è suff. grande.

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \omega \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-ik\omega t}\, dt \right) e^{ik\omega x} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \omega \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-ik\omega t}\, dt \right) e^{ik\omega x} =$$

Poniamo $\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt$ e possiamo scrivere

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \omega\, \hat{f}(k\omega) \cdot e^{ik\omega x} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \omega\, \hat{f}(k\omega)\, e^{ik\omega x}$$

Se si immagina di far tendere $T \to +\infty$, cioè $\omega \to 0^+$, sotto opportune condizioni per f, si trova che

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda$$

Def. Data $f \in L^1(\mathbb{R})$ definiamo $\hat{f} : \lambda \to \hat{f}(\lambda)$

dove $\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} \, dt$.

OSS. $\hat{f}(\lambda) \in L^\infty(\mathbb{R})$ perché

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad |\hat{f}(\lambda)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} \, dt \right| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot |e^{-i\lambda t}| \, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \, dt = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

Quindi $\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$

Proprietà di $\mathcal{F}$ (trasf. di Fourier)

1) $\mathcal{F}$ è lineare: $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha f(t) + \beta g(t)) e^{-i\lambda t} \, dt =$$

$$= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} \, dt + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\lambda t} \, dt = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$$

② $\mathcal{F}: L^1 \to L^\infty$ è continua.

cioè $\left(f_n \to f \text{ in } L^1 \right) \Rightarrow \left(\hat{f}_n \to \hat{f} \text{ in } L^\infty \right)$

Vista la linearità di $\mathcal{F}$ basta mostrare che

$$\left(f_n \to \bar{0} \text{ in } L^1 \right) \Rightarrow \left(\hat{f}_n \to \bar{0} \text{ in } L^\infty \right)$$

ma questo è ovvio perché:

$$\| \hat{f}_n \|_{L^\infty} \leq \| f_n \|_{L^1}$$

e quindi se $\| f_n \|_{L^1} \to 0$ allora $\| \hat{f}_n \|_{L^\infty} \to 0$

3) $f(x)$ è pari $\Rightarrow$ $\hat{f}(\lambda)$ pari

perché

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overbrace{e^{-i\lambda t}}^{e^{i(-\lambda t)}} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \Big(\cos(+\lambda t) - i \sin(+\lambda t) \Big) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\lambda t) \, dt - i \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\lambda t) \, dt}_{=0} =$$

$= 0$ perché $f(x) \sin(\lambda x)$ è dispari

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\lambda t) \, dt$$

Quindi $\hat{f}(\lambda)$ è reale e inoltre $\hat{f}$ è pari perché

$$\hat{f}(-\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(-\lambda t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\lambda t)\,dt=\hat{f}(\lambda).$$

④ Se $f(x)$ è dispari $\hat{f}(\lambda)$ è immaginario puro e $\hat{f}(\lambda)$ è dispari. (Fare per casa)

⑤ $f(x)\to f(cx)$ $\quad(c>0)$ (ma anche $c<0$)

$\hat{f}(x)\to\ ..$

$\boxed{c>0}$ $\quad\boxed{u=ct}$

$$\widehat{f(cx)}=\int_{-\infty}^{+\infty} f(ct)\,e^{-i\lambda t}\,dt=\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{+\infty} f(ct)\,e^{-i\frac{\lambda}{c}\cdot ct}\cdot(ct)'\,dt=$$

$$=\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,e^{-i\frac{\lambda}{c}u}\,du=\frac{1}{c}\hat{f}\left(\frac{\lambda}{c}\right)$$

Se ora $c<0$ si ottiene

$$\widehat{f(cx)}=\dots\dots=-\frac{1}{c}\hat{f}\left(\frac{\lambda}{c}\right)$$, quindi in generale si ha $$\widehat{f(cx)}=\frac{1}{|c|}\hat{f}\left(\frac{\lambda}{c}\right).$$

⑥ $f(x)\to f(x-x_0)$

$\hat{f}\to$?? (fare per casa)