Metodi Matematici - Lez. 16

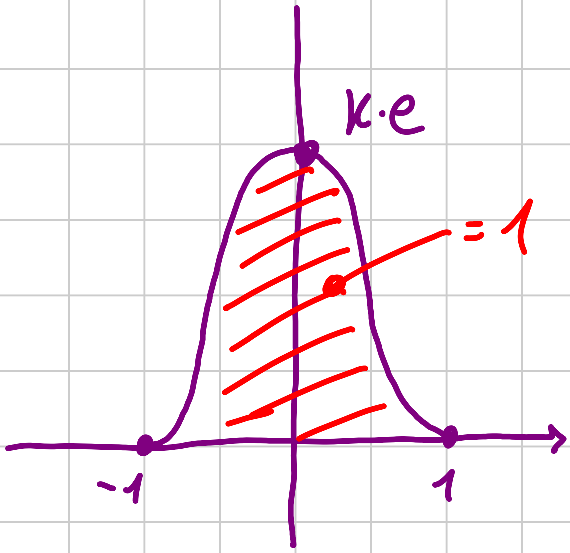
Titolo nota

14 novembre 2017 (9:30-11.15) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

REGOLARIZZAZIONE CON LA CONVOLUZIONE

Prendiamo:

$$\varphi(x) = \begin{cases} K e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{se } x \in (-1,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



dove K è preso in modo che $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 1$

prendo $\varphi_n(x) = n \cdot \varphi(nx)$ ottengo che $\operatorname{supp} \varphi_n(x) = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$

e $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} n\varphi(nx)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\,dy = 1$

Oss. che $\varphi(x)$ è C^1 perché:

$$\varphi'(x) = \begin{cases} K \cdot \frac{-2x}{(x^2-1)^2} \cdot e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{se } x \in (-1,1) \\ 0 & x = 1 \\ 0 & x = -1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

$x = 1$ $\quad \varphi'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \varphi'(x) = \lim_{x \to 1^+} 0 = 0$

$$\varphi'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \varphi'(x) = \lim_{x \to 1^-} K \frac{-2x}{(x^2-1)^2} e^{\frac{1}{x^2-1}} =$$

$$= \lim_{x \to 1^-} K \cdot \boxed{\frac{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2}{e^{\frac{1}{1-x^2}}}} 2x = 0$$

$$\frac{y^2}{e^y} \xrightarrow{y \to +\infty} 0$$

Iterando il procedimento si trova

$$\varphi^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{P(x)}{(x^2-1)^m} \cdot e^{\frac{1}{x^2-1}} & |x| < 1 \\ 0 & x = 1 \\ 0 & x = -1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

$$\varphi \text{ è } C_0^\infty(\mathbb{R})$$

Data $f \in L^1(\mathbb{R})$, per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ definiamo:

$$\underline{f_n(x)} = (f * \varphi_n)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, \varphi_n(x-y)\, dy$$

$\boxed{1}$ Mostriamo che $f_n(x)$ è derivabile

$$f_n'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \boxed{\frac{\varphi_n(x+h-y) - \varphi_n(x-y)}{h}} \, dy \right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \, \varphi_n'(x-y) \, dy = \text{esiste finito}$$

osserviamo che, grazie al T. di Lagrange, e al fatto che φ_n' è limitata si ha $|\square| \leq M$ quindi $M = \|\varphi_n'\|_{L^\infty}$

per ogni $h \in \mathbb{R}$ $|f(y) \cdot \square| \leq M |f(y)|$

quindi posso usare T. conv. dominata e fare passaggio

Iterando il procedimento si trova che $\forall k \in \mathbb{N}$ esiste $f_n^{(k)}(x)$, quindi $f_n(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$

$\boxed{2}$ Se f è anche continua, allora $f_n \to f$ uniformemente sui compatti.

Sia K compatto, e $x \in K$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \varphi_n(x-y) \, dy - f(x) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x-y) \, dy \right| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(y) - f(x)) \varphi_n(x-y) \right| dy \leq \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} |f(y) - f(x)| \varphi_n(x-y) \, dy \quad (*)$$

Prendo $[a,b]$ t.c. $K \subset [a+1, b-1]$ e, visto che $f \in C(\mathbb{R})$ sarà continua anche su $[a,b]$ che è compatto, quindi f è unif. continua su $[a,b]$ per H.C.

Ma allora

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x,y \in [a,b] \ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Quindi se prendo $n \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{1}{n} < \delta$ avrò che nella $(*)$ $|x-y| < \frac{1}{n} < \delta$ e quindi:

$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ e quindi la $(*)$ diventa

$$(*) \leq \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} \varepsilon \cdot \varphi_n(x-y)\, dy = \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$$

fissato $\varepsilon > 0$

Quindi, poichè il δ dipende solo da $[a,b]$, esso è lo stesso per tutti gli $x \in K$, quindi si ha:

$$\forall x \in K \ \forall \varepsilon > 0 \ \overline{\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } n > n_0} \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

cioè passando al sup per $x \in K$, si ha:

$\forall \varepsilon > 0$, definitivamente in n, $\|f_n - f\|_{L^\infty(K)} < \varepsilon$

Quindi $f_n \to f$ uniformemente su K.

$\boxed{3}$ $\|f_n\|_{L^1} \leq \|f\|_{L}$

$$\|f_n\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x)|\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, \varphi_n(x-y)\, dy \right| dx \leq$$

T. Fubini Tonelli

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|\, \varphi_n(x-y)\, dy \right) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|\, \varphi_n(x-y)\, dx \right) dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| \cdot \overbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x-y)\, dx \right)}^{1} dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|\, dy = \|f\|_{L^1}$$