Metodi Matematici - Lez. 17

Titolo nota

20 novembre 2017 (14:00-15.45) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

(... Continua: Regolarizzazione)

Ricordare che $f_n(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\varphi_n(x-y)\,dy$

dove $f \in L^1(\mathbb{R})$ e φ_n è definita come lez. scorsa.

$\boxed{\text{Teorema}}$ Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e f_n è definita come sopra, allora $f_n \xrightarrow{L^1} f$.

$\boxed{\text{Dim}}$ (Userò il Lemma, che dimostro subito dopo, che afferma che $C_0(\mathbb{R})$ è denso in $L^1(\mathbb{R})$)

Data f, per mostrare che $f_n \xrightarrow{L^1} f$ mostriamo che

(★) $\forall \varepsilon > 0$ def. in n $\|f_n - f\|_{L^1} < \varepsilon$.

$\boxed{\forall \varepsilon > 0}$ Prendiamo $g \in C_0(\mathbb{R})$ t.c. $\|f - g\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{3}$

Allora

$$\|f_n - f\|_{L^1} = \|f_n - g + g - f\|_{L^1} \le \|f_n - g\| + \|g - f\| = (*)$$

detta ora g_n la regolarizzante g, ottengo

$$(*) \le \|\underbrace{f_n - g_n}_{(f-g)_n}\| + \|g_n - g\| + \|g - f\| \le \frac{\varepsilon}{3} + \|g_n - g\| + \frac{\varepsilon}{3}$$

Perché $\|(f-g)_n\| \le \|f - g\| \le \frac{\varepsilon}{3}$

Poiché g è a supp. compatto allora $\|g_n - g\|_{L^1} \leq C \cdot \|g_n - g\|_{L^\infty}$

e quindi $\longrightarrow 0$ perché sappiamo che $g_n \to g$ unif. sui compatti. [OSS. POSSO FARE QUESTO PERCHÈ SE

SUPP $g \subset [a,b]$ allora supp$(g_n) \subset [a-1, b+1]$ $\forall n \in \mathbb{N}-\{0\}$

e quindi il compatto $[a-1, b+1]$ contiene tutti i supporti.]

Quindi posso scegliere n_0 t.c. $\overbrace{\|g_n - g\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{3}}^{\forall n > n_0}$.

Quindi per $n > n_0$ si ha:

$$\|f - f_n\|_{L^1} \leq \dots \leq (*) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Quindi abbiamo dimostrato ($\forall$).

Dimostriamo il lemma che abbiamo usato:

$\boxed{\text{Lemma}}$ $C_0(\mathbb{R})$ è denso in $L^1(\mathbb{R})$.

Dim.

OSS1 [Intanto osserviamo che basta dimostrarlo per le f a supporto compatto. (Perché se $f \in L^1$ so che $\lim_{M \to +\infty} \int_{-M}^{M} |f(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$, quindi, prendendo M suff. grande posso far sì che $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - f(x)\chi_{[-M,M]}(x)|\,dx$ sia piccolo quanto mi serve)

Prendo quindi $f \in L^1$ t.c. $f(x) = 0$ se $|x| > M$.

OSS.2 Dalla def. di int. di Lebesgue segue che

$\forall \varepsilon > 0 \;\exists\, \varphi(x)$ funzione semplice t.c.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - \varphi(x)| \, dx < \varepsilon$$

MODULO è gratis perché $f \geq \varphi$

Poiché $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}(x)$ con E_i misurabili limitati

basterà mostrare che se E è misurabile e limitato

allora esiste $\varphi_E(x)$ continua a supp. compatto che approssima $\chi_E(x)$ bene quanto

voglio nella norma L^1.

Poiché E è misurabile so che $\forall \varepsilon > 0 \;\exists K \subset E$ (compatto)

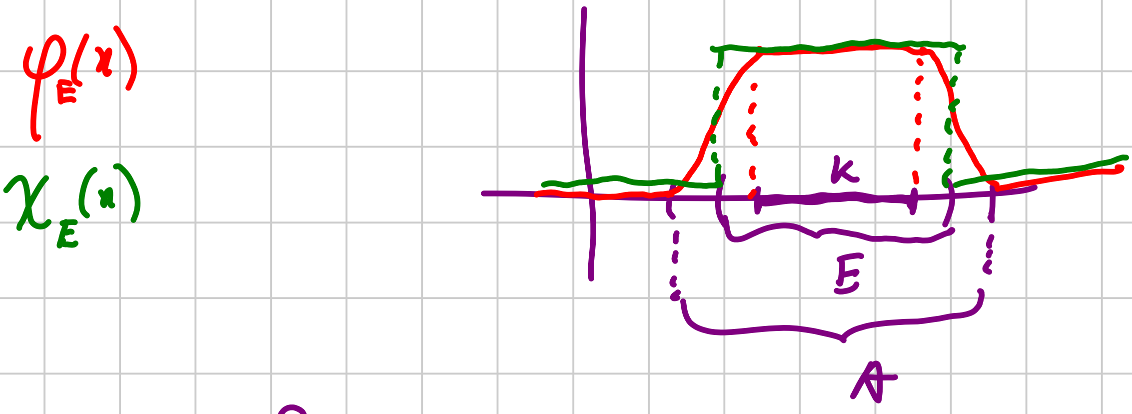
e $A \supset E$ (aperto) t.c. $\mu(A - K) < \varepsilon$

Poi prendo $\varphi_E(x) = \dfrac{d(x, A^c)}{d(x, A^c) + d(x, K)}$

inoltre φ_E è a supp. compatto

questa è continua perché quoziente di f. continue di cui quella a denominatore non è mai nulla.

e vale 1 su K, 0 fuori da A e su $A - K$ il suo valore è sempre compreso tra 0 e 1



Quindi $\|\varphi_E-\chi_E\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} |\varphi_E(x)-\chi_E(x)|\,dx =$

$$= \int_{A-K} |\varphi_E(x)-\chi_E(x)|\,dx \le \int_{A-K} 1\,dx = \mu(A-K) < \varepsilon$$

DERIVATE GENERALIZZATE

$\boxed{\text{OSS.}}$ Date $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ almeno continue, dire che g è derivata di f equivale a dire che

(*) $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ si ha $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x)\,dx$

$\boxed{\Rightarrow}$ Infatti se prendo $g = f'$ la (*) è soddisfatta, perché

se supp $\varphi \subset [a,b]$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx =$$

$$= -\int_a^b f'(x)\,\varphi(x)\,dx = \Big[f(x)\,\varphi(x)\Big]_a^b + \int_a^b f(x)\,\varphi'(x)\,dx =$$

Perché $\mathrm{supp}\,\varphi \subset [a,b]$

$$= 0 + \int_a^b f(x)\,\varphi'(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Mostriamo che se g_1 e g_2 sono continue e soddisfano (*) allora $g_1 = g_2$

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \qquad \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} g_1(x)\,\varphi(x)\,dx$$

$$\|$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int g_2(x)\,\varphi(x)\,dx$$

Quindi $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\big(g_1(x) - g_2(x)\big)}\,\underbrace{\varphi(x)}\,dx = 0$$

$g_1(x) - g_2(x)$ deve essere ident. nulla perché se per assurdo fosse $\neq 0$ per un qualche x_0