Metodi Matematici - Lez. 18

Titolo nota

21 novembre 2017 (9:30-11.15) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

$\boxed{\text{... CONTINUA}}$

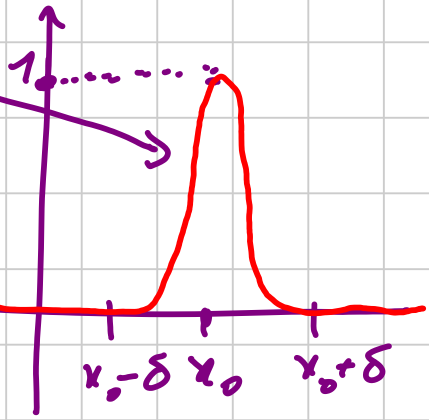
Per completare dimo. di volta scorsa bisogna far vedere che:

Se $h(x)$ è continua in $\mathbb{R}$ e $h(x_0) \neq 0$ allora $\exists\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ t.c.

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)\,\varphi(x)\, dx \neq 0 .$$

Prendo $\delta > 0$ t.c. in $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ $h(x)$ abbia lo stesso segno di $h(x_0)$ $\boxed{\text{ma sia anche } |h(x)| > \frac{|h(x_0)|}{2}}$ (posso per t. permanenza del segno). Poi prendo

$\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ con grafico:



$$\varphi(x) = \begin{cases} K e^{\frac{1}{(x-x_0)^2-\delta^2}} & x \mid |x-x_0| < \delta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per tale φ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\varphi(x)\, dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h(x)\,\varphi(x)\, dx >$$

$h(x_0) > 0$ (<0)

$$\overset{(<)}{>} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{h(x_0)}{2}\varphi(x)\,dx = \frac{h(x_0)}{2}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varphi(x)\,dx \overset{(<)}{>} 0$$

$\boxed{\text{Def.}}$ Date $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, diremo che g è derivata "debole" di f se

$$\boxed{\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)\,dx}$$

$\boxed{\text{Teorema}}$ Se $g_1, g_2 \in L^1(\mathbb{R})$ sono entrambe derivate deboli di $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora

$$g_1(x) = g_2(x) \quad \text{q.o.}$$

[cioè l'insieme $\{x \in \mathbb{R} \mid g_1(x) \neq g_2(x)\}$ ha misura 0]

$\boxed{\text{Dim}}$ Dire che g_1 e g_2 sono der. debole di f. significa dire che:

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x)\varphi(x)\,dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} g_2(x)\varphi(x)\,dx$$

Quindi $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ deve essere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(g_1(x) - g_2(x)\right) \varphi(x) \, dx = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Lemma 1} \\ \text{(subito dopo)}\end{array}} \longrightarrow \Downarrow$$

$$g_1(x) - g_2(x) = 0 \quad \text{q.o.}$$

$\boxed{\text{Lemma 1}}$ Data $f \in L^1(\mathbb{R})$, se $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ si ha $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx = 0$ allora $f(x) = 0$ q.o.

$\boxed{\text{DIM}}$ $\boxed{\text{I° passo}}$ Per mostrare che $f(x) = 0$ q.o. basta mostrare che $\int_E f(x)\,dx = 0$ $\forall E$ misurabile

$$\int_E f(x)\,dx \longleftrightarrow \boxed{\int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_E(x)\,dx}$$

Infatti supp. per assurdo che

$$\underbrace{\text{mis}\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}}_{= A \cup B} \neq 0$$

$= A \cup B$ dove $\left.\begin{array}{l} B = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} \\ A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < 0\} \end{array}\right\}$ sono misurabili

Almeno uno tra A e B deve avere mis $\neq 0$,
per esempio supponiamo mis $B \neq 0$.

$$B = \bigcup B_n \quad \text{dove} \quad B_n = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > \tfrac{1}{n}\}$$

oss. $B_n \subset B_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$

per ipotesi

$$0 = \int_{B_n} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \chi_{B_n}(x)\,dx \geq \int \frac{1}{n} \chi_{B_n}(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} \chi_{B_n}(x)\,dx = \frac{1}{n} \mu(B_n)$$

$$\Downarrow$$

$$\mu(B_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

unione disgiunta

$$B = B_1 \cup \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (B_{n+1} - B_n) \right)$$

$$\text{mis}(B) = \text{mis}(B_1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \text{mis}(B_{n+1} - B_n) =$$

$$= 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$$

Quindi ho dimostrato che se

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \quad \forall \varphi \text{ funzione caratt. di insieme misurabile}$$

allora $f(x)=0$ q.o.

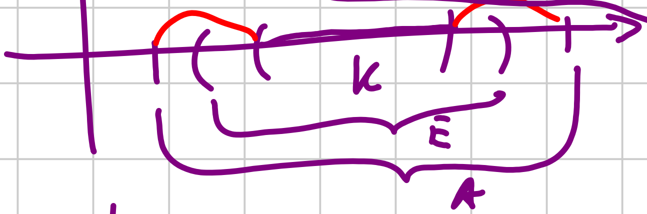
$\boxed{\text{II° passo}}$ Prendo E misurabile $\forall \varepsilon>0$ esiste $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$

t.c. $$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\left(\chi_E(x) - \varphi(x)\right) dx\right| < \varepsilon$$

$\neq 0$ se $x \in A-K$

$$\varphi(x) = \frac{d(x, A^c)}{d(x, A^c) + d(x, K)}$$

Prendo $(A_n - K_n) \to 0$ posso farlo perché E è misurabile



Prendo A e K t.c. $$\boxed{\int_{A-K} |f(x)|\, dx < \varepsilon}$$

Posso farlo grazie al seguente sotto-lemma:

$\boxed{\text{S. Lemma}}$ Data $f \in L^1(\mathbb{R})$ e date $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ sequenza di insiemi misurabili t.c. $\boxed{A_{n+1} \subset A_n}$ e t.c. $\boxed{\text{mis.}(A_0) = \lambda \in \mathbb{R}}$ e t.c. $\boxed{\text{mis}(A_n) \to 0}$

Allora $\int_{A_n} |f(x)|\, dx \to 0$ per $n \to +\infty$

$\boxed{\text{Dim. Sotto lemma}}$ $$\int_{A_n} |f(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \cdot \chi_{A_n}(x)\, dx \to$$

$$\to \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \cdot \chi_A(x)\, dx = 0$$

$A = \bigcap A_n$

Poiché tutte $|f(x)| \cdot \chi_{A_n}(x)$ e $|f(x)| \cdot \chi_A(x)$ sono $\leq |f(x)| \in L^1$ posso applicare T. conv. dominata

---

$$⊙ = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\chi_E(x) - \varphi(x) \right) dx \right| =$$

$$= \left| \int_{A_n - K_n} f(x) \left(\chi_E(x) - \varphi(x) \right) dx \right| \leq$$

$$\leq \int_{A_n - K_n} |f(x)|\, dx \to 0$$
