Metodi Matematici - Lez. 19

Titolo nota

27 novembre 2017 (14:00-15.45) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

... CONTINUA DIMO TEO

$$\left(f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ e } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow f \underset{q.o.}{=} 0 \right)$$

I° passo Se $f(x)$ non è q.o. nulla allora $\exists E$ misurabile di misura finita t.c. $\int f(x)\chi_E(x)\,dx \neq 0$

II° passo Se f non è nulla q.o. allora $\exists \varphi \in C_0(\mathbb{R})$ t.c. $\int f(x)\varphi(x)\,dx \neq 0$

III° passo Se f non è nulla q.o. allora, grazie al passo II posso prendere $\psi \in C_0(\mathbb{R})$ t.c.

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\psi(x)\,dx = \lambda \neq 0$$

Per esempio sia $\lambda > 0$ (analogamente si tratta il caso $\lambda < 0$)

Prendiamo ora $(\psi_n(x))$ la succ. delle regolarizzate di ψ. So che $\psi_n \to \psi$ uniformemente sui compatti.

Si ha che $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\psi_n(x)\,dx \to \int_{\mathbb{R}} f(x)\psi(x)\,dx$

perché:

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\big(\psi_n(x)-\psi(x)\big)\,dx\right| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\cdot|\psi_n(x)-\psi(x)|\,dx \le$$

$$\le \|\psi_n-\psi\|_{L^\infty(K)} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx =$$

K è compatto contenente tutti i supporti di ψ e ψ_n

$$= \|\psi_n-\psi\|_{L^\infty(K)} \cdot \|f\|_{L^1} \to 0$$

Dal fatto che

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\psi_n(x)\,dx \to \int_{\mathbb{R}} f(x)\psi(x)\,dx = \lambda \neq 0$$

Quindi prendendo n suff. grande, anche

$$(*) \quad \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\psi_n(x)\,dx \neq 0$$

ciò significa che sono riuscito a trovare $\psi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ t.c. vale $(*)$ supponendo per assurdo che f non fosse nulla q.o..

Quindi se $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\psi(x)\,dx = 0 \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ allora deve essere necess. $f(x)=0$ q.o. ∎

Teorema Date $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ t.c. $f_n \xrightarrow{L^1} f$ e $f_n' \xrightarrow{L^1} g$

regol. n-esima di f

Allora $g = f'$.

Dim Voglio dimostrare che $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$(*) \qquad \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\,dx \overset{?}{=} -\int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x)\,dx$$

Per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ so che, $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ si ha:

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} f_n'(x)\varphi(x)\,dx$$

$$\downarrow (A) \qquad\qquad\qquad \downarrow (B)$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\,dx \qquad -\int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x)\,dx$$

Da cui segue $(*)$.

Motiviamo (A) e (B).

Si ha:

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \big(f_n(x) - f(x)\big)\varphi'(x)\,dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \cdot \|\varphi'\|_{L^\infty}\,dx =$$

$$= \|\varphi'\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \, dx =$$

$$= \|\varphi'\|_{L^\infty} \cdot \|f_n - f\|_{L^1} \to 0 \quad \left(\text{quindi è vero (A)}\right)$$

Per (B) si ha

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \left(f_n'(x) - g(x)\right) \varphi(x) \, dx \right| \leq \underbrace{\cdots}_{\text{come prima}} \leq \|\varphi\|_{L^\infty} \cdot \|f_n' - g\|_{L^1} \to 0$$

(quindi è vero (B))

DISTRIBUZIONI

$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ è derivabile infinite volte e tutte le derivate sono continue e supp. compatto $\}$

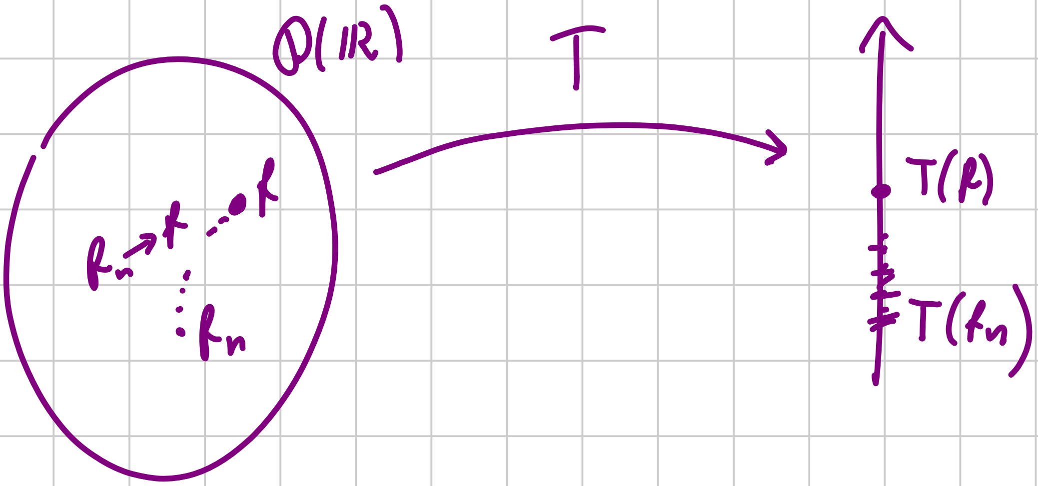
Definiamo cosa significa che, data $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e $(f_n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$, sia $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} f$.

Significa che:

1) $\exists K \subset \mathbb{R}$ compatto t.c. $K \supset \operatorname{supp} f_n \quad \forall n$

$K \supset \operatorname{supp} f$

2) $\forall k \in \mathbb{N} \quad f_n^{(k)} \xrightarrow{\text{unif. su } K} f^{(k)}$



Def. Dato un qualsiasi funzionale $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ diremo che T è continuo in $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ se $\forall (f_n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e t.c. $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} f$ si ha $T(f_n) \to T(f)$.

Def. (Distribuzioni)

Indichiamo con $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ il duale topologico di $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, cioè l'insieme di tutte le $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ lineari e continue.

1) Dire che T è lineare significa che $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si ha

$$T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$$

2) Dire che T è continuo significa che $\forall f, (f_n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ se $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} f$ allora $T(f_n) \to T(f)$.

Tutte le $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ prendono il nome di <u>distribuzioni</u>.

$\boxed{\text{Def.}}$ Date $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e data $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

diremo che $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} T$ se

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad T_n(\varphi) \to T(\varphi)$$

$\boxed{\text{ES. 1}}$ Per ogni $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ definiamo

$$T_f : \underset{\mathcal{D}(\mathbb{R})}{\underset{\cap}{\varphi}} \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx$$

1) T_f è lineare perché:

$$T_f(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \cdot \overset{?}{\cdot} \cdot = \alpha T_f(\varphi_1) + \beta T_f(\varphi_2)$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\cdot\left(\alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_2(x)\right)dx = \alpha\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_1(x)\,dx + \beta\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi_2(x)\,dx$$

2) T_f è continua perché:

$$T_f(\varphi_n) \xrightarrow{?} T_f(\varphi) \quad \text{se} \quad \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} \varphi$$

$$\| $$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi_n(x)\,dx = \int_K f(x)\,\varphi_n(x)\,dx \xrightarrow{?} \int_K f(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,dx = T_f(\varphi)$$

prendo K compatto contenente tutti i supporti di φ_n e φ.

$(*)$

$$(*) \quad \left| \int_K f(x)\,\big(\varphi_n(x) - \varphi(x)\big)\,dx \right| \le \int_K |f(x)| \cdot \underbrace{|\varphi_n(x) - \varphi(x)|}_{\le \|\varphi_n - \varphi\|_{L^\infty(K)}}\,dx$$

$$\le \|\varphi_n - \varphi\|_{L^\infty(K)} \cdot \|f\|_{L^1(K)} \longrightarrow 0$$