Metodi Matematici - Lez. 20

Titolo nota

28 novembre 2017 (9:30-11.15) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

DISTRIBUZIONI (Continua)

$\boxed{\text{Esempio 1}}$

$$T_n : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$\varphi \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2}\chi_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}(x)\,\varphi(x)\,dx$$

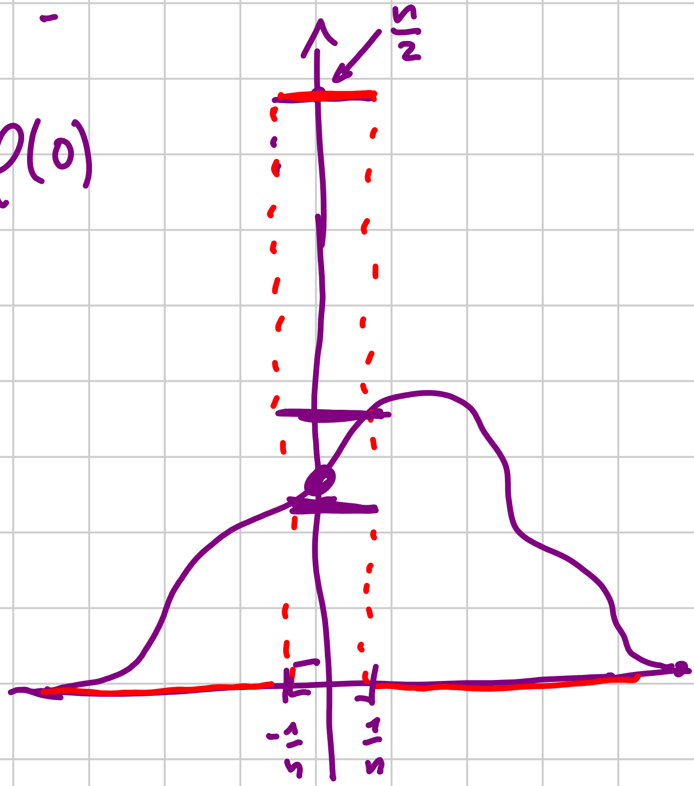
$$T_{\frac{n}{2}\chi_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}}$$

$$T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$\varphi \longmapsto \varphi(0)$$

Mostriamo che $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} T$, cioè che $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si ha $T_n(\varphi) \overset{?}{\to} T(\varphi)$.

$$T_n(\varphi) = \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2}\chi_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}(x)\,\varphi(x)\,dx} = \boxed{\frac{1}{\frac{2}{n}} \cdot \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi(x)\,dx}$$

$$T(\varphi) = \varphi(0)$$



$$\underbrace{\inf_{x\in[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]} \varphi(x)}_{\to\,\varphi(0)} \leq \circledcirc \leq \underbrace{\sup_{x\in[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]} \varphi(x)}_{\to\,\varphi(0)}$$

$$\boxed{\frac{2}{n} \cdot \inf_{x\in[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]} \varphi(x)}$$

Poiché φ è continua in 0 si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \inf_{x\in[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]} \varphi(x) = \varphi(0)$$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ t.c. $\varphi(I_\delta(0)) \subset (\varphi(0)-\varepsilon, \varphi(0)+\varepsilon)$

Basta considerare n t.c. $[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}] \subset I_\delta(0)$

Derivata di una distribuzione

Def. Data $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ definiamo T' come quella distribuzione tale che:

$$T'(\varphi) = -T(\varphi')$$

OSS. 1 se $f, g\in L^1$ e $g=f'$ in senso debole, allora

$$T_g(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx = -T_f(\varphi')$$

OSS. 2 Una distr. T è sempre derivabile.

infatti la legge $\varphi \mapsto -T(\varphi')$

è lineare e continua.

1) Lineare (ovvio)

2) Continua perché se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} \varphi$ anche

$\varphi_n' \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} \varphi'$ e quindi

$$-T(\varphi_n') \to -T(\varphi')$$

ES. Mostrare che se $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ è tale che

$T' = 0$ allora T è la distribuzione associata

ad una funzione costante:

$$T' = 0 \iff \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad T'(\varphi) = 0$$

cioè $\boxed{T(\varphi') = 0}$

OSS Data ψ funzione test è equivalente affermare

che

1) ψ è derivata di una funzione test.

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\,dx = 0$

$(1) \Rightarrow (2)$ perché se $\psi(x) = \varphi'(x)$ con $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

allora $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\,dx =$

$[a,b] \supset \text{supp}\,\varphi$ $= \int_a^b \varphi'(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a) = 0 - 0 = 0$

(dove $a <$ inf(supporto di ψ))

$(2) \Rightarrow (1)$ Prendo $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(t)\,dt = \int_a^x \psi(t)\,dt$

$$\varphi'(x) = \psi(x).$$

Voglio mostrare che $\exists C$ t.c.

$$T(\varphi) = C \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

Prendo φ_0 t.c. $T(\varphi_0) = \alpha_0 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x)\,dx$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x) = 1}$$

Voglio mostrare che

$\forall$ altra φ $\quad T(\varphi) = \alpha_0 \overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx}^{A}$

Detto $A = \int \varphi(x)\,dx$ se prendo la funzione $\varphi(x) - A\,\varphi_0(x)$

essa ha integrale nullo, quindi

$$\left.\begin{aligned} & T\big(\varphi(x) - A\,\varphi_0(x)\big) = 0 \\ & \qquad \| \\ & T(\varphi(x)) - A \cdot T(\varphi_0(x)) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \int \varphi(x)\,dx \\ \downarrow \\ T(\varphi) = A\,\underbrace{T(\varphi_0)}_{\alpha_0} = \end{array}$$

$$= \alpha_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

Quindi $\exists\, \alpha_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$T(\varphi) = \alpha_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_0 \cdot \varphi(x)\,dx$$

Quindi T è la distribuzione associata alla funzione costante α_0.