# Metodi Matematici - Lez. 21

Titolo nota

4 dicembre 2017 (14:00-15.45) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

$\boxed{\text{ES. 1}}$ Data $\underline{T = \delta_0}$, chi è $T'$?

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \qquad T'(\varphi) = -T(\varphi') = -\varphi'(0)$$

$$T' : \varphi \longmapsto -\varphi'(0).$$

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} 0$$

$$\Downarrow \; ?$$

$$T'(\varphi_n) \to 0$$

$$|T'(\varphi_n)| = |-\varphi_n'(0)| \leq \|\varphi_n'\|_{L^\infty}$$

---

$\boxed{\text{Teo 1}}$ Data $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è equivalente affermare che:

1) $T$ è continua (nel senso delle distribuzioni)

2) $\forall K$ compatto $\exists N_K \in \mathbb{N}$ e $\exists C_K \in (0, +\infty)$ t.c. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K$ si ha $|T(\varphi)| \leq C \underbrace{\|\varphi\|}_{N,\infty}$

$$\boxed{\begin{aligned} \|\varphi\|_{N,\infty} &= \|\varphi\|_\infty + \|\varphi'\|_\infty + \cdots + \|\varphi^{(N)}\|_\infty \\ &\approx \mathrm{MAX}\{\|\varphi\|_\infty, \ldots, \|\varphi^{(N)}\|_\infty\} \end{aligned}}$$

**Def.** Data $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ diremo che $T$ è di ordine infinito se nel Teo. prec. il $\sup\limits_{K \text{ compatto}} N_K = +\infty$.

Se invece $\sup\limits_{K \text{ compatto}} N_K = N_0$ finito, diremo che $T$ è di ordine $N_0$.

**Es.** Data $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$\varphi \longmapsto \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi^{(n)}(n)}$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ la ● è una somma finita perché esiste sempre $n_0$ t.c. se $n > n_0$ allora $n \notin \text{supp.}(\varphi)$, quindi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi^{(n)}(n) = \sum_{n=0}^{n_0} \varphi^{(n)}(n) \quad (T \text{ è ben definita})$$

$T$ è lineare perché $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$T(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha\varphi_1^{(n)}(n) + \beta\varphi_2^{(n)}(n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{n_0} \alpha\varphi_1^{(n)}(n) + \beta\varphi_2^{(n)}(n) =$$

Preso $n_0$ t.c. se $n > n_0$ allora $n \notin (\text{supp}\,\varphi_1 \cup \text{supp}\,\varphi_2)$

$$= \alpha \sum_{n=0}^{n_0} \varphi_1^{(n)}(n) + \beta \sum_{n=0}^{n_0} \varphi_2(n) =$$

$$= \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_1^{(n)}(n) + \beta \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_2^{(n)}(n) =$$

$$= \alpha T(\varphi_1) + \beta T(\varphi_2)$$

$\boxed{\text{T è continua}}$ perché se $(\varphi_i)$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ t.c.

(*) $\boxed{\varphi_i \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} 0}$ allora $T(\varphi_i) \overset{?}{\to} 0$

Prendo $(\varphi_i)$ t.c. (*) sappiamo che $\exists K$ compatto t.c. $\text{supp.}\varphi_i \subset K \quad \forall i \in \mathbb{N}$.

Quindi, detto $n_0$ t.c. $n > n_0 \Rightarrow n \notin K$, si ha:

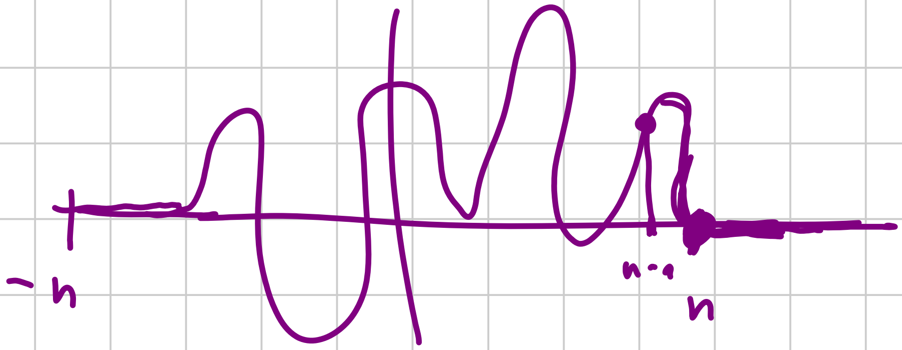
$$\underset{\substack{\downarrow}}{0} \leq \underbrace{|T(\varphi_i)|}_{\substack{\downarrow \\ 0}} = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_i^{(n)}(n)\right| = \left|\sum_{n=0}^{n_0} \varphi_i^{(n)}(n)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{n_0} \|\varphi_i^{(n)}\|_\infty =$$

$$= \underbrace{\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\|\varphi_i^{(0)}\|_\infty} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\|\varphi_i^{(1)}\|_\infty} + \dots + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\|\varphi_i^{(n_0)}\|_\infty}}_{\substack{\downarrow \\ 0}}$$

$\boxed{\text{T ha ordine infinito}}$ Infatti per il compatto $K = [-n, n]$

si ha $N_K = n-1$ quindi $\sup_{K \text{ compatto}} N_K = +\infty$



---

**OSS.** Come definire il prodotto tra $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ in modo che sia coerente col prodotto di funzioni?

Cioè voglio che se $T = T_g$ con $g \in L^1_{loc}$. si abbia che $fT = T_{fg}$.

**Def (*)** Data $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ definiamo

$$f \cdot T : \mathcal{D}(\varphi) \to \mathbb{R}$$
$$\varphi \longmapsto T(f\varphi)$$

**OSS.** Prima di mostrare che $\boxed{\text{Def}(*)}$ definisca davvero una distribuzione, mostriamo che nel caso buono (cioè $T = T_g$ con $g \in L^1_{loc}$) la nuova def. è coerente con il prodotto di funzioni cioè che:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad (f \cdot T_g)(\varphi) \overset{?}{=} T_{fg}(\varphi)$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ T_g(f\varphi) & & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot g(x)\,\varphi(x)\,dx \\ \| & /\!/ & \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\,\varphi(x)\,dx & & \end{array}$$

---

Verifica che la $fT$ definita da Def $(*)$ è ben posta ed è una distribuzione

1) Ben definita: perché se $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ e $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ allora

$$f\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

2) Lineare: (ovvio)

3) Continuità: Usiamo $\boxed{\text{Teo } 1}$.

So che $\underbrace{T \text{ è continua}}_{(A)}$, e devo dimostrare che $\underbrace{fT \text{ è continua}}_{(B)}$

So: (A) $\forall K$ compatto $\exists N\in\mathbb{N}$ e $\exists C\in(0,+\infty)$ t.c. $\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $\operatorname{supp}\varphi\subset K$ si ha $|T(\varphi)|\le C\,\|\varphi\|_{N,\infty}$

Devo dim: (B) $\forall K$ compatto $\exists N\in\mathbb{N}$ e $\exists C_1\in(0,+\infty)$ t.c. $\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $\operatorname{supp}\varphi\subset K$ si ha $\underbrace{|(fT)(\varphi)|\le C_1\,\|\varphi\|_{N,\infty}}_{?}$

$$|(fT)(\varphi)| = |T(f\varphi)| \leq C\,\boxed{\|f\varphi\|_{N,\infty}} \leq \cdots\cdots \leq \underbrace{C\cdot M}_{C_1}\cdot\|\varphi\|_{N,\infty}$$

$$\overbrace{\|f\varphi\|_{N,\infty} = \underbrace{\|f\varphi\|_\infty} + \underbrace{\|(f\varphi)'\|_\infty} + \|(f\varphi)''\|_\infty + \cdots + \|(f\varphi)^{(N)}\|_\infty}^{(\star)}$$

$$\sup_{x\in K}|f(x)\cdot\varphi(x)| \leq \sup_{x\in K}\big|\,\|f\|_{L^\infty(K)}\cdot\varphi(x)\big| \leq (\cdots\cdots)$$

$$\|f\|_{L^\infty(K)}\cdot\|\varphi\|_\infty \leq \|f\|_{N,\infty}\cdot\|\varphi\|_{N,\infty}$$

$$\|(f\varphi)'\|_\infty = \|f\varphi' + f'\varphi\|_\infty \leq \|f\varphi'\|_\infty + \|f'\varphi\|_\infty \leq$$

$$\leq \|f\|_{L^\infty(K)}\cdot\|\varphi'\|_\infty + \|f'\|_{L^\infty(K)}\cdot\|\varphi\|_\infty \leq$$

$$\leq 2\cdot\|f\|_{\overset{\text{su } K}{1,\infty}}\cdot\|\varphi\|_{1,\infty} \leq$$

$$\leq 2\cdot\|f\|_{N,\infty}\cdot\|\varphi\|_{N,\infty}$$

$$\|(fg)^{(k)}\|_\infty \leq 2^k\cdot\|f\|_{N,\infty}\cdot\|\varphi\|_{N,\infty}$$

Quindi $(\star)$ diventa

$$\|fg\|_{N,\infty} \leq \overbrace{(1+2+2^2+\cdots+2^N)\|f\|_{N,\infty}}^{M \leftarrow \boxed{\text{Non dipende da } \varphi}}\cdot\|\varphi\|_{N,\infty}$$