Metodi Matematici - Lez. 22

Titolo nota

5 dicembre 2017 (9:30-11.15) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

SUPPORTO DI DISTR.

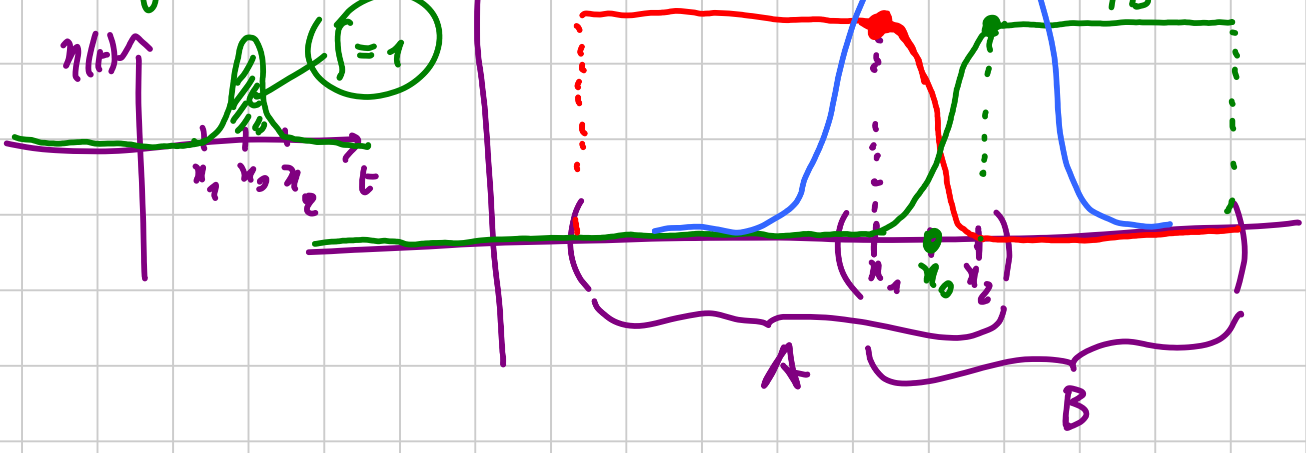
Def. 1 Data $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e dato $A \subset \mathbb{R}$ aperto diremo che T si annulla in A se $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $\operatorname{supp} \varphi \subset A$ si ha $T(\varphi) = 0$.

Def. 2 Data $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ indichiamo con $\operatorname{supp}(T)$ l'insieme $\left(\bigcup_{T \text{ si annulla in } A} A \right)^c$

OSS. T si annulla in (*).

Vediamo caso particolare: se A, B sono aperti in cui T si annulla, allora T si annulla anche in $A \cup B$.

$$\psi_B(x) = \int_0^x \eta(t)\, dt$$



$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ t.c. $\operatorname{supp}\varphi \subset A \cup B$ posso scrivere:

$$\varphi(x) = \varphi(x)\cdot 1 = \varphi(x)\cdot\left(\psi_A(x) + \psi_B(x)\right) =$$

$$= \underbrace{\varphi(x)\cdot\psi_A(x)} + \underbrace{\varphi(x)\cdot\psi_B(x)} =$$

$\varphi(x)\cdot\psi_A(x)$ è:

1) C^∞ perché prodotto di fun. C^∞
2) a supp. compatto perché $\operatorname{supp}\left(\varphi(x)\cdot\psi_A(x)\right) \subset \operatorname{supp}\varphi(x)$
3) $\operatorname{supp}(\varphi\cdot\psi_A) \subset A$ perché in $B-A$ $\psi_A(x)=0$

$\Updownarrow$

$\boxed{\varphi(x)\cdot\psi_A(x)}$ è una funzione Test con supporto in A

$\varphi(x)\cdot\psi_B(x)$: IDEM (cambiando A con B)

Quindi, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $\operatorname{supp}(\varphi) \subset A \cup B$, si ha

$$T(\varphi) = T(\varphi\cdot\psi_A + \varphi\cdot\psi_B) =$$

$$= T(\varphi\cdot\psi_A) + T(\varphi\cdot\psi_B) =$$

Perché T si annulla in A e in B

$$= 0 + 0 = 0$$

Quindi T si annulla in $A \cup B$

$\boxed{1}$ Procedendo in modo analogo si potrebbe mostrare che se T si annulla in una famiglia finita di aperti $A_1, A_2, \dots, A_n$ allora T si annulla in $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$.

Infatti si riesce a costruire come prima $\psi_{A_1}, \psi_{A_2}, \dots, \psi_{A_n}$ C^∞ e tali che

$$\psi_{A_1}(x) + \psi_{A_2}(x) + \dots + \psi_{A_n}(x) = 1 \text{ in } \overbrace{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}^{A}$$

ma con $\psi_{A_i}(x) = 0$ in $A - A_i$ $\forall i \in 1, \dots, n$

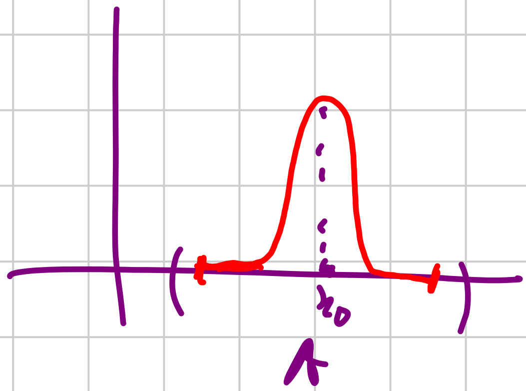
Dopodiché ogni $\varphi(x)$ con supporto contenuto in A si può scrivere come:

$$\varphi(x) = \varphi(x) \cdot 1 = \varphi(x) \cdot \psi_{A_1}(x) + \varphi(x) \cdot \psi_{A_2}(x) + \dots + \varphi(x) \psi_{A_n}(x)$$

[poi come prima]

$\boxed{2}$ Se invece la famiglia di aperti $\{A_i\}$ è infinita, poiché $\mathrm{supp}(\varphi)$ è compatto si può sempre ricondursi al caso finito, prendendo la sotto-famiglia finita che ricopre $\mathrm{supp}(\varphi)$.

$\boxed{\text{ES. di Supporti}}$



$$T : \varphi \longmapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx$$

$$\text{supp.}(T) = \mathbb{R}$$

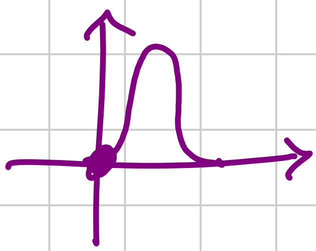
Infatti $\forall\, A \subset \mathbb{R}$ aperto io posso avere che T non si annulla in A. Infatti, basta prendere $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $\text{supp}\,\varphi \subset A$ e tale che

$$\int \varphi \neq 0,$$

e si ha $T(\varphi) \neq 0$ anche se $\text{supp}\,\varphi \subset A$.

$\boxed{\text{ES.}}$

$$T = \delta(0) \qquad \text{supp}(T) = \{0\}$$



$$T : \varphi \longmapsto \varphi(0)$$

Infatti $\forall\, A$ aperto non contenente 0 se $\text{supp.}\,\varphi \subset A$ allora $\varphi(0) = 0$

quindi $T(\varphi) = \varphi(0) = 0$

$\boxed{\text{OSS.}}$ Se supp(T) è compatto allora

T ha ordine finito.

Infatti $\forall K$ compatto so che $\exists N \in \mathbb{N}, C \in (0,+\infty)$ t.c.

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con supp. $\varphi \subset K$ si ha:

$$|T(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{N,\infty}$$

Quindi per ogni K che contenga supp φ la N che va bene per K è la stessa che va bene per supp.(φ). Quindi tale N è l'ordine di T.

ES. per caso: se supp$(T) = \{x_0\}$

e ordine di $T = 0$

posso dire che $T = c \cdot \delta(x_0)$?

$\boxed{\text{SI}}$