$\boxed{\text{ES. 1}}$ Sia $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ t.c. 1) $\operatorname{supp} T=\{0\}$

2) T ha ordine 0

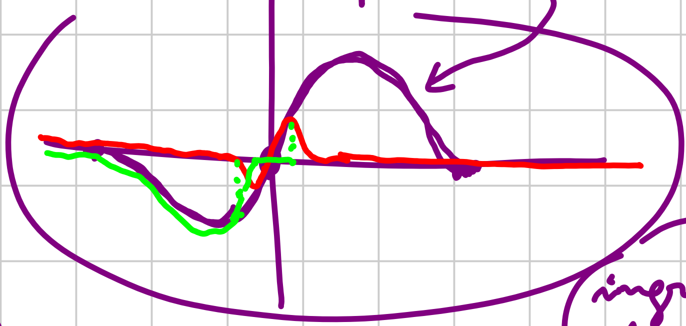
Allora esiste $c\in\mathbb{R}$ t.c. $T=c\,\delta_0$

$\boxed{\text{I° passo}}$ se $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ e $\varphi(0)=0$ allora $T(\varphi)=0$.

(1) significa che ogni $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ t.c.

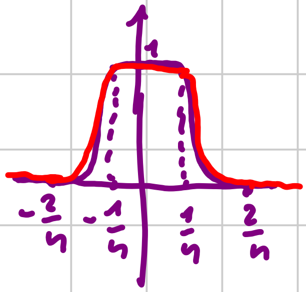
$\operatorname{supp}\varphi\subset\mathbb{R}-\{0\}$ è tale che $T(\varphi)=0$

Devo però dimostrare che anche φ così sono



ingrandito dopo

tali che $T(\varphi)=0$.

Prendo $\psi_n=$ 

cioè $\psi_n\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$

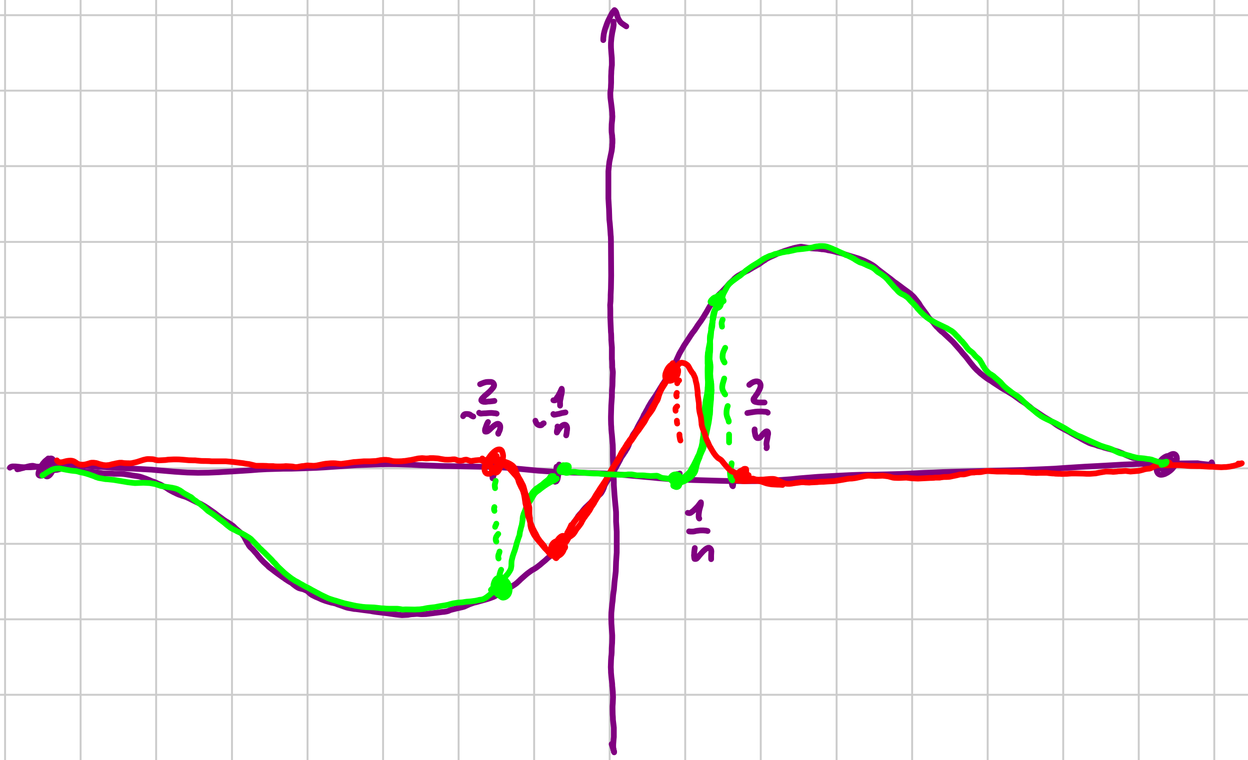
e $\psi_n=1$ su $[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]$

$\psi_n=0$ fuori da $[-\frac{2}{n},\frac{2}{n}]$

Si ha che $\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ t.c. $\varphi(0)=0$ posso

scrivere $\varphi(x)=1\cdot\varphi(x)=\big(1-\psi_n(x)+\psi_n(x)\big)\varphi(x)=$

$$= \underbrace{(1-\psi_n(x))\varphi(x)} + \underbrace{\psi_n(x)\,\varphi(x)}$$



$$|T(\varphi)| = \left|T\Big((1-\psi_n(x))\varphi(x) + \psi_n(x)\varphi(x)\Big)\right| =$$

$$= \left|T\Big((1-\psi_n(x))\varphi(x)\Big) + T\Big(\psi_n(x)\varphi(x)\Big)\right| =$$

$$= \left|0 + T\Big(\psi_n(x)\,\varphi(x)\Big)\right| =$$

$$= \left|T\big(\psi_n(x)\cdot\varphi(x)\big)\right| \leq C\,\|\psi_n\cdot\varphi\|_{L^\infty([-1,1])} \leq$$

$$\leq C\cdot\|\varphi\|_{L^\infty([-\frac{2}{n},\frac{2}{n}])} \longrightarrow 0$$

SI Perché φ è continua e $\varphi(0)=0$

Quindi, in realtà $|T(\psi_n(x)\varphi(x))| = 0 \ \forall n$ e

quindi $T(\varphi) = 0$

$\boxed{\text{II° punto}}$ Devo dimostrare che:

$\exists\, c \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si ha $T(\varphi) = c\,\varphi(0)$.

Prendo una qualsiasi $\bar{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ t.c. $\bar{\varphi}(0) \neq 0$.

Allora $T(\bar{\varphi}) = \lambda = \boxed{\frac{\lambda}{\bar{\varphi}(0)}}\,\bar{\varphi}(0) = c\,\bar{\varphi}(0)$

per un'opportuna $c \in \mathbb{R}$.

Per ogni altra $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ prendiamo la funzione

$$\boxed{h(x) = \varphi(x) - \frac{\varphi(0)}{\bar{\varphi}(0)} \cdot \bar{\varphi}(x)}$$

Avremo che $h(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e $h(0) = \varphi(0) - \frac{\varphi(0)}{\bar{\varphi}(0)} \cdot \bar{\varphi}(0) = 0$

quindi $T(h) = 0$ cioè

$$T\left(\varphi(x) - \frac{\varphi(0)}{\bar{\varphi}(0)}\,\bar{\varphi}(x)\right) = 0$$

cioè

$$T(\varphi(x)) - \frac{\varphi(0)}{\bar{\varphi}(0)}\,T(\bar{\varphi}(x)) = 0$$

cioè

$$T(\varphi(x)) = \frac{\varphi(0)}{\bar{\varphi}(0)} \cdot T(\bar{\varphi}(x)) = \frac{\varphi(0)}{\cancel{\bar{\varphi}(0)}} \cdot c \cdot \cancel{\bar{\varphi}(0)} = c\,\varphi(0)$$

In generale se T avesse avuto ordine k e supporto $= \{0\}$ era necess. del tipo $\varphi \xmapsto{T} \sum_{i=0}^{k} c_i\,\varphi^{(i)}(0)$

$$\boxed{\text{Composizione tra } T \text{ e } g(x) = ax+b}$$

Dobbiamo dare definizione in modo che sia coerente con comp. di funzioni, cioè:

$$T_{f(x)} \qquad T_{f(g(x))}$$

$$T_f \circ g \quad \longleftrightarrow \quad \text{devono essere uguali}$$

$$T_{f(g(x))} : \varphi \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(g(x))\,\varphi(x)\,dx =$$

$$\|$$

$$T_{f(ax+b)} \qquad = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\overset{y}{\overbrace{ax+b}})\,\varphi(x)\,\underbrace{a\,dx} =$$

$y = ax+b$ ⟷ $x = \frac{y-b}{a}$

$(a>0)$

$(a<0)$

$$= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty\;(+\infty)}^{+\infty\;(-\infty)} f(y)\,\varphi\!\left(\frac{y-b}{a}\right)dy \;\Bigg] =$$

$$= \frac{1}{|a|}\,T\!\left(\varphi\!\left(\frac{y-b}{a}\right)\right)$$

Quindi, perché la def. sia coerente con la comp. di funzione basta che sia la seguente:

Def. Data $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e $g(x) = ax + b$ definiamo

$$T \circ g : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$\varphi(y) \mapsto \frac{1}{|a|} T\left(\varphi\left(\frac{y-b}{a}\right)\right)$$

Casi particolari:

1) Traslazione di x_0 in avanti: $g(x) = x - x_0$

$$T \circ g : \varphi \mapsto T(\varphi(x + x_0))$$

2) simmetria rispetto a origine: $g(x) = -x$

$$T \circ g : \varphi \mapsto T(\varphi(-x))$$

Def Diremo che T è pari se, preso $g(x) = -x$

$$\boxed{T \circ g = T} \iff \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad T(\varphi(-x)) = T(\varphi(x))$$

Invece Diremo che T è dispari se

$$\boxed{T \circ g = -T} \iff \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad T(\varphi(-x)) = -T(\varphi(x))$$

$\boxed{\text{ES. 1}}$ δ è pari o dispari o niente?

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\delta(\varphi(x)) = \underbrace{\varphi(0)} \qquad \delta(\varphi(-x)) = \varphi(-0) = \underbrace{\varphi(0)}$$

δ è pari.

$\boxed{\text{OSS.}}$ se T è $\overset{(\text{dispari})}{\text{pari}}$ allora T' è $\overset{(\text{pari})}{\text{dispari}}$.

$$T'(\varphi) = -T(\varphi') \qquad -(-T(\varphi'(x))) = T(\varphi'(x))$$

def. di derivata

$$T'(\varphi(-x)) \overset{?}{=} -T'(\varphi(x)) \quad (\text{se } T \text{ è pari})$$

(*)

def. di derivata

$$-T(-\varphi'(-x)) \underset{\text{Linearità}}{=} T(\varphi'(-x)) \underset{T \text{ è pari}}{=} T(\varphi'(x))$$

Quindi vale (*)

Nello stesso modo (fare per casa) se T è dispari allora T' è pari.

ES. $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$\varphi \longmapsto \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

è una distribuzione di ordine 1.

$\boxed{\text{I}}$ T è ben definita in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ perché

da controllare meglio (*)

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\substack{|x|>\varepsilon \\ |x|\le a}} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\substack{|x|>\varepsilon \\ |x|\le a}} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} + \frac{\varphi(0)}{x}\, dx$$

(*) ←

$\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{b \to +\infty} \int_{-b}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{b} \frac{\varphi(0)}{x}\, dx =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} 0 = 0$$

limitata perché per $x \to 0$ tende a $\varphi'(0)$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\substack{|x|>\varepsilon \\ |x|\le a}} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\, dx = \int_{|x|\le a} \psi(x)\, dx = \text{finito}$$

continua.

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\[2ex] \varphi'(0) & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Rimane da dimostrare (per casa) che

1) $T(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha T(\varphi_1) + \beta T(\varphi_2)$

cioè

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\alpha\varphi_1(x)+\beta\varphi_2(x)}{x}\,dx = \alpha \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi_1(x)}{x}\,dx + \beta \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi_2(x)}{x}\,dx$$

(vera $\forall \varepsilon > 0$ e quindi anche passando al limite)

2) $\varphi_n \to 0 \quad T(\varphi_n) \to 0 \quad [\dots\dots]$

Si mostra che $|T(\varphi_n)| \leq C \|\varphi_n'\|_{L^\infty}$

Conti per casa

Usare T. di Lagrange per dire che

$$\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\right| \leq \|\varphi'\|_{L^\infty}$$