Metodi Matematici - Lez. 24

Titolo nota

12 dicembre 2017 (9:30-11.15) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

DISTR. TEMPERATE

Def. $\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall k \in \mathbb{N} \; \forall m \in \mathbb{N} \; \underbrace{}_{\exists C_{m,k} > 0 \text{ t.c.}} \; \| x^m \varphi^{(k)} \|_{L^\infty} < C_{m,k} \}$

Diremo che $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \varphi \; (0)$ se $\forall m, k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\| x^m \varphi_n^{(k)} - \underbrace{x^m \varphi^{(k)}}_{0} \|_{L^\infty} \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty$$

Def. Chiameremo "distribuzione temperata" un qualsiasi funzionale lineare e continuo su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

OSS.1 $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$

Infatti se $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\forall k \in \mathbb{N}$ e $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\| x^m \varphi^{(k)} \|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \| x^m \varphi^{(k)} \|_{L^\infty(\underset{\text{supp.}\varphi}{K})} \leq$$

$$\leq \| x^m \varphi^{(k)} \|_{L^\infty([-b, b])} \leq$$

$$\leq b^m \cdot \| \varphi^{(k)} \|_{L^\infty([-b,b])} \leq \boxed{b^m \cdot C_k}$$

$\boxed{\text{OSS 2}}$ Non vale viceversa di $\boxed{\text{OSS 1}}$

Infatti preso $\varphi(x) = e^{-x^2}$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$

ma supp. $\varphi = \mathbb{R}$.

$\forall m \in \mathbb{N}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ si ha:

$$\| x^m (e^{-x^2})^{(k)} \|_{L^\infty} =$$

$$(e^{-x^2})^{(k)} = \underbrace{P(x)}_{\text{grado } k} e^{-x^2}$$

$$(P(x) e^{-x^2})' = \underbrace{(P'(x) + P(x)\cdot(-2x)) e^{-x^2}}$$

$$= \| \underbrace{x^m \cdot \overbrace{P(x)}^{\text{grado } k} \cdot e^{-x^2}} \|_{L^\infty} \leq$$

$\circledcirc \to 0$ per $x \to \pm\infty$

$$\leq \max \circledcirc = C_{m,k}$$

Quindi $\varphi(x) = e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$\boxed{\text{OSS 3}}$ Date (φ_n) e $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ è vero che

$$\underset{(1)}{\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} \varphi} \implies \underset{(2)}{\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \varphi} \quad ? \quad \boxed{\text{SI}}$$

Basta dimostrare (1) ⇒ (2) nel caso $\varphi = 0$.

Da (1) segue che $\exists\, b > 0$ t.c. tutti i supporti delle φ_n stanno in $[-b, b]$. Quindi $\forall m \in \mathbb{N}$ $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\| x^m \varphi_n^{(k)} \|_{L^\infty(\mathbb{R})} =$$

$$= \| x^m \varphi_n^{(k)} \|_{L^\infty([-b,b])} \le b^m \cdot \|\varphi_n^{(k)}\|_{L^\infty[-b,b]}$$

Quindi

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \le & \underbrace{\| x^m \varphi_n^{(k)} \|_{L^\infty(\mathbb{R})}} & \le & b^m \cdot \|\varphi_n^{(k)}\|_{L^\infty([-b,b])} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{ per (1)} \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Quindi vale (2)

Per esempio mostrare che preso $\varphi(x)$

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2^n}\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$$

$\varphi_n \xrightarrow{S(\mathbb{R})} 0$ ma $\varphi_n \overset{D(\mathbb{R})}{\not\to} 0$