Metodi Matematici - Lez. 25

Titolo nota

18 dicembre 2017 (14:00-15.45) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

$\boxed{\text{Oss.}}$ $\exists (\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ t.c. $\varphi_n \xrightarrow[(1)]{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0$ ma $\varphi_n \underset{(2)}{\overset{\mathcal{D}(\mathbb{R})}{\not\to}} 0$

Basta prendere $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ non identicamente nulla

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2^n}\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$$

(2) $\varphi_n \overset{\mathcal{D}(\mathbb{R})}{\not\to} 0$ perché non c'è un compatto che contenga tutti i supporti delle φ_n. Infatti se $x_0 \neq 0$ è tale che $\varphi(x_0) \neq 0$ allora

$$\varphi_n(n x_0) = \frac{1}{2^n}\varphi\left(\frac{n x_0}{n}\right) = \frac{1}{2^n}\varphi(x_0) \neq 0$$

Quindi, comunque preso K compatto, se n è sufficientemente grande $n x_0 \notin K$ e quindi $\operatorname{supp}\varphi_n \not\subset K$.

(1) $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0$ cioè bisogna mostrare che

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \|x^m \varphi_n^{(k)}\|_{L^\infty} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

Ricordare che $\varphi_n^{(k)} = \left(\frac{1}{2^n}\varphi\left(\frac{x}{n}\right)\right)^{(k)} = \overbrace{\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{n^k}\varphi^{(k)}\left(\frac{x}{n}\right)}$

Sia $a > 0$ t.c. $[-a, a] \supset \operatorname{supp}\varphi$, allora supp $\varphi_n \subset [-na, na]$ quindi:

$$\| x^m \varphi_n^{(k)}(x) \|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \| x^m \underbrace{\varphi_n^{(k)}(x)}\|_{L^\infty([-an,an])} =$$

$$= \left\| x^m \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n^k} \varphi^{(k)}\left(\frac{x}{n}\right)\right\|_{L^\infty([-an,an])} \leq$$

$$\leq (an)^m \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n^k} \cdot \left\| \varphi^{(k)}\left(\frac{x}{n}\right)\right\|_{L^\infty([-an,an])} =$$

$$= a^m \cdot \| \varphi^{(k)} \|_{L^\infty} \cdot \frac{n^{m-k}}{2^n}$$

Quindi

$$\underset{\downarrow \, 0}{0} \leq \underbrace{\| x^m \varphi_n^{(k)} \|_{L^\infty}}_{\downarrow \, 0} \leq a^m \cdot \| \varphi^{(k)} \|_{L^\infty} \cdot \underbrace{\frac{n^{m-k}}{2^n}}_{\text{per } n \to \infty \, \downarrow \, 0}$$

$\boxed{\text{Def.}}$ Data $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ lineare, diremo che T è una "distribuzione temperata" se $\forall (\varphi_n)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ t.c. $\varphi_n \to 0$ si ha $T(\varphi_n) \to 0$

[$\mathcal{S}'$ insieme delle dist. Temperate si indica con $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$]

$\boxed{\text{OSS.}}$ $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$\boxed{\text{ES.}}$ di $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ma t.c. $T \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Basta prendere T_f con f che cresce esponenzialmente, ad esempio $f(x) = e^x$.

In tal caso se $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ può succedere che $T_f(\varphi)$ non sia definita.

Infatti:

$$\boxed{\frac{1}{e^{\sqrt{1+x^2}}}}$$

$$T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{\sqrt{1+x^2}}}\,dx = +\infty$$

Perché integrale diverge

— o —

Per concludere oss. bisogna mostrare che se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ allora è definita su tutto $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (ovvio perché $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$) e risulta continua secondo la convergenza in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ perché

$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} 0 \Rightarrow \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0$ e quindi

$T(\varphi_n) \to 0$

Perché T. è temperata

$\boxed{\text{ES. 1}}$ δ_0 è dist. Temperata

1) $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ $\delta(\varphi)$ è ben definita? $\boxed{\text{SI}}$

$\delta(\varphi) = \varphi(0)$

2) $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0 \overset{?}{\Rightarrow} \delta(\varphi_n) \to 0$

SI perché $0 \leq \underbrace{|\delta(\varphi_n)|}_{\downarrow 0} = |\varphi_n(0)| \leq \underbrace{\|\varphi_n\|_{L^\infty}}_{\downarrow 0}$

$\boxed{\text{ES.2}}$ (1) $f \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

(2) $f \in L^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow$ . . .

(3) f polinomio $\Rightarrow$ . . .

(4) $f \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow$ . . . . .

Mostriamo (1) (resto esercizio)

(A) $T_f(\varphi)$ è ben definito in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ se $f \in L^1(\mathbb{R})$

$$|T_f(\varphi)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)\,\varphi(x)|\,dx \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \cdot \|\varphi(x)\|_{L^\infty}\,dx =$$

$$= \|\varphi\|_{L^\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = \|\varphi\|_{L^\infty} \cdot \|f\|_{L^1}$$

Inoltre se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0$ allora $T_f(\varphi_n) \to 0$ perché

$$0 \le \underbrace{|T_f(\varphi_n)|}_{\to 0} = \dots \le \underbrace{\|\varphi_n\|_{L^\infty}}_{\to 0} \cdot \|f\|_{L^1}$$

$\boxed{\text{Mostriamo anche (3)}}$ cioè che f polinomio di grado k $\Rightarrow$ T_f dist. Temperata

(A) $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ $T_f(\varphi)$ è ben definita perché:

$$|T_f(\varphi)| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x) \cdot \varphi(x)|\,dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} \underbrace{\Big|\overbrace{(1+x^2) f(x)}^{\text{grado } k+2}\, \varphi(x)\Big|}_{\le \sum_{i=0}^{k+2} \|x^i \varphi(x)\|_{L^\infty}}\,dx \le$$

$$\leq \left(\sum_{i=0}^{k+2} \| x^i \varphi(x) \|_{L^\infty} \right) \cdot \overbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} \, dx}^{=\pi}$$

$$0 \leq |T_f(\varphi)| \leq \pi \left(\sum_{i=0}^{k+2} \| x^i \varphi(x) \|_{L^\infty} \right)$$

(B) Se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0$ allora $T(\varphi_n) \to 0$ perché:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{0} \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\underbrace{|T_f(\varphi_n)|}} \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\underbrace{\pi \left(\sum_{i=0}^{k+2} \| x^i \varphi_n(x) \|_{L^\infty} \right)}}$$

$\boxed{\text{OSS.}}$ Se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0$ allora $\forall k \in \mathbb{N}$ $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\| x^m \varphi_n^{(k)} \|_{L^1} \to 0$$

Infatti.

$$\| x^m \varphi_n^{(k)} \|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} | x^m \varphi_n^{(k)}(x) | \, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} \cdot \left| (1+x^2) x^m \varphi_n^{(k)}(x) \right| dx \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} \left(\| x^m \varphi_n^{(k)} \|_{L^\infty} + \| x^{m+2} \varphi_n^{(k)} \|_{L^\infty} \right) dx =$$

$$= \left(\| x^m \varphi_n^{(k)} \|_{L^\infty} + \| x^{m+2} \varphi_n^{(k)} \|_{L^\infty} \right) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} \, dx =$$

$$= \pi \left(\underbrace{\| x^m \varphi_n^{(k)} \|_{L^\infty}}_{\downarrow \, 0} + \underbrace{\| x^{m+2} \varphi_n^{(k)} \|_{L^\infty}}_{\downarrow \, 0} \right)$$

per $n \to +\infty$

Quindi

$$\| x^m \varphi_n^{(k)} \|_{L^1} \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty$$

$\boxed{\text{Teorema}}$ Se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ allora $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$\boxed{\text{DIM}}$

$$\| \lambda^m (\hat{\varphi}(\lambda))^{(k)} \|_\infty$$

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-i\lambda x} \, dx$$

$$\lambda^m (\hat{\varphi}(\lambda))^{(k)} = \lambda^m \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)^k \varphi(x) e^{-i\lambda x} \, dx$$

$$\left| \lambda^m (\hat{\varphi}(\lambda))^{(k)} \right| = \left| \frac{1}{(-i)^m} \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)^k \varphi(x) \overbrace{(-i\lambda)^m e^{-i\lambda x}}^{(e^{-i\lambda x})^{(m)}} \, dx \right|$$

$$= \left| \frac{1}{(-i)^m} \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)^k \varphi(x) \left(e^{-i\lambda x}\right)^{(m)} dx \right| =$$

$$= \left| (-1)^m \frac{(-i)^k}{(-i)^m} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x^k \varphi(x)\right)^{(m)} e^{-i\lambda x} \, dx \right| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \left(x^k \varphi(x)\right)^{(m)} \right| dx =$$

$$= \left\| \left(x^k \varphi(x)\right)^{(m)} \right\|_{L^1} \leq \cdots$$