Metodi Matematici - Lez. 27

Titolo nota

8 gennaio 2018 (14:00-15.45) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

TR. DI FOURIER IN L^2

NOTA: SE $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ allora

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \overline{g(x)}\, dx$$

$$\| f \|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \overline{f(x)}\, dx \geq 0$$

T. 1 Date $f, g \in \mathcal{S}$ allora

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

Dim

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)}\, dx$$

$$\underline{\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle} = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) \overline{\hat{g}(\lambda)}\, d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x}\, dx \right) \cdot \overline{\hat{g}(\lambda)}\, d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x}\, \overline{\hat{g}(\lambda)}\, d\lambda\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} \overline{\hat{g}(\lambda)} \, d\lambda \right) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{e^{i\lambda x} \hat{g}(\lambda) \, d\lambda} \; dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \hat{g}(\lambda) \, d\lambda \right)} \, dx =$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \hat{g}(\lambda) \, d\lambda \right)} \, dx =$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \overline{g(x)} \, dx =$$

$$= 2\pi \langle f, g \rangle$$

$\boxed{\text{T.2 (Plancherel)}}$

Data $f \in L^2(\mathbb{R})$ definiamo $\hat{f}_n(\lambda) = \left(f(x) \cdot \chi_{[-n,n]}(x) \right)^{\wedge}(\lambda)$, allora $\exists\, g \in L^2(\mathbb{R})$ t.c. $\hat{f}_n \xrightarrow{L^2} g$ e inoltre se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ si ha $g = \hat{f}$.

Inoltre $\|g\|_{L^2}^2 = 2\pi \|f\|_{L^2}^2$

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\boxed{\text{I° Passo}}$ supponiamo che f sia nulla fuori di un intervallo $[-a,a]$.

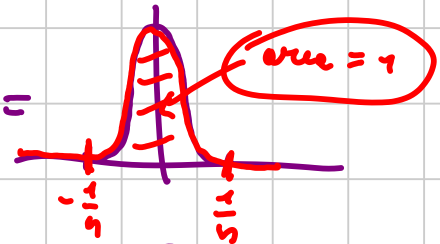
Tale $f \in L^2$ allora è anche L^1 perché:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int_{-a}^{a} |f(x)|\cdot 1\,dx \le \|f\|_{L^2_{(-a,a)}} \cdot \|1\|_{L^2_{(-a,a)}} = \sqrt{2a}\,\|f\|_{L^2}$$

So che esiste una successione $\big(h_n(x)\big)$ in $C_0^\infty\big([-a-1,a+1]\big)$

t.c. $\underbrace{h_n \xrightarrow{L^1} f}_{(*)}$ e $\underbrace{h_n \xrightarrow{L^2} f}_{(*)}$.

[Ad esempio posso prendere $h_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\varphi_n(x-y)\,dy$

dove $\varphi_n(x) =$ 

]

Notiamo che $h_n \in \mathcal{S}$ $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$

Da $(*)$ segue che h_n è di Cauchy rispetto $\|\cdot\|_{L^2}$

quindi $\hat{h}_n$ è pure di Cauchy perché:

$$\|\hat{h}_n - \hat{h}_m\|_{L^2} = \sqrt{2\pi}\cdot\|h_n - h_m\|_{L^2}$$

Ma allora $(\hat{h}_n)$ è convergente in $L^2(\mathbb{R})$,

cioè $\exists\, h \in L^2(\mathbb{R})$ t.c. $\hat{h}_n \xrightarrow{L^2} h$

Da $(*)$ segue che $\hat{h}_n \xrightarrow{L^\infty} \hat{f}$ ← questa è la trasf. di Fourier in senso classico questo perché $\forall f \in L^1$ $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$.

$$\left(\forall x \quad \left| \int f(x) e^{-i\lambda x} \, dx \right| \leq \int |f(x)| \, dx = \|f\|_{L^1} \right)$$

A questo punto $\hat{f}$ e h sono la stessa funzione perché in ogni intervallo I limitato ho:

$$\left.\begin{array}{l} h_n \xrightarrow{L^2(I)} h \\ h_n \xrightarrow{L^\infty(I)} \hat{f} \Rightarrow h_n \xrightarrow{L^2(I)} \hat{f} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} h = \hat{f} \\ \text{in ogni } I \text{ limitato} \end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{h = \hat{f} \text{ in } \mathbb{R}}$$

$$\|h\|_{L^2}^2$$
$$\|$$

Mostriamo ora che $\|\hat{f}\|_{L^2}^2 = 2\pi \|f\|_{L^2}$.

Poiché $\hat{h}_n \xrightarrow{L^2} \hat{f}$ $\qquad h_n \xrightarrow{L^2} f$ avremo anche

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\|\hat{h}_n\|_{L^2}^2 \to \|\hat{f}\|_{L^2}^2 \quad (A) \qquad\qquad \|h_n\|_{L^2}^2 \to \|f\|_{L^2}^2 \quad (B)$$

Poiché per ogni n $\|\hat{h}_n\|_{L^2}^2 = 2\pi \|h_n\|_{L^2}^2$

passando al limite in (A) e (B) si ottiene

$$\|\hat{f}\|_{L^2}^2 = 2\pi \|f\|_{L^2}^2$$

$\boxed{\text{II}^\circ \text{ passo}}$ Caso generale: $f \in L^2(\mathbb{R})$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ prendo $f_n(x) = f(x) \cdot \chi_{[-n,n]}(x)$

Avremo che $f_n \xrightarrow{L^2} f$ perché:

$$\|f - f_n\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} \left(f(x) - f_n(x)\right)^2 dx =$$

Perché $f \in L^2$ cioè f^2 è sommabile

$$= \int_{-\infty}^{-n} (f(x))^2 dx + \int_{n}^{+\infty} (f(x))^2 dx \longrightarrow 0$$

Ma $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ $f_n(x)$ ricade nel passo precedente, quindi; da $f_n \xrightarrow{L^2} f$ deduco che f_n è di Cauchy, e quindi anche $\hat{f}_n$ è di Cauchy perché so che $\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_{L^2}^2 = 2\pi \|f_n - f_m\|_{L^2}^2$

e quindi $(\hat{f}_n) \xrightarrow{L^2} g$ per una opportuna $g \in L^2$

Tale g soddisfa anche $\|g\|_{L^2}^2 = 2\pi \|f\|_{L^2}^2$

perché so che $\hat{f}_n \xrightarrow{L^2} g$, $f_n \xrightarrow{L^2} f$

e per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ $\|\hat{f}_n\|_{L^2}^2 = 2\pi \|f_n\|_{L^2}^2$

Se poi $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ allora

detta $\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx$ si ha

$\hat{f}_n \xrightarrow{L^\infty} \hat{f}$ perché $f_n \xrightarrow{L^1} f$

ma poiché $\hat{f}_n \xrightarrow{L^2} g$ allora

$\hat{f}$ e g sono la stessa funzione [...]
