Metodi Matematici - Lez. 1

Titolo nota

24 settembre 2018 (14.00-15.45) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

ANALISI FUNZIONALE "ZERO"

DEF. 1 (Spazio Metrico)

Dato un insieme M e data $d : M \times M \to \mathbb{R}$

diremo che (M, d) è uno spazio metrico se:

1) $\forall x, y \in M \quad d(x,y) \geq 0$ con uguaglianza che vale se e solo se $x = y$

2) $\forall x, y \in M \quad d(x,y) = d(y,x)$

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE 3) $\forall x, y, z \in M \quad d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

ESEMPIO 1 $\underbrace{B([0,1])}_{M} = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ è limitata} \}$

$\forall f, g \in M$ definiamo $d(f,g) = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$

N.B. $d(f,g) \in \mathbb{R}^+$ perché f e g sono limitate

Verifichiamo che d è una distanza cioè mostriamo che verifica (1) (2) e (3).

(1) $d(f,g) = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| \overset{\text{ovvio}}{\geq} 0$

e l'uguaglianza vale se e solo se

$\forall x \in [0,1]$ si ha $|f(x)-g(x)|=0$

cioè $f(x)=g(x)$

(2) $d(f,g) = d(g,f)$ (ovvio)

(3) $\forall f,g,h$ voglio mostrare che

$$\underbrace{d(f,h)}_{} \overset{?}{\leq} d(f,g)+d(g,h)$$

$$= \sup_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)+g(x)-h(x)| \leq$$

$$\leq \sup_{x\in[0,1]} \Big(\underbrace{|f(x)-g(x)|}_{(*)} + \underbrace{|g(x)-h(x)|}_{(\bullet)} \Big) \leq d(f,g)+d(g,h)$$

$$(*) \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)| = d(f,g)$$

$$(\bullet) \leq \sup_{x\in[0,1]} |g(x)-h(x)| = d(g,h)$$

$\Rightarrow$ $d(f,g)+d(g,h)$ è maggiorante di $(*)+(\bullet)$ per ogni $x\in[0,1]$

$\Downarrow$

$$d(f,g)+d(g,h) \geq$$

$$\geq \sup_{x\in[0,1]} \big((*)+(\bullet)\big)$$

Quindi d soddisfa anche la disuguaglianza triangolare

Indicheremo tale d con $\boxed{d_\infty}$ $\left(d_\infty(f,g) \right)$

DEF. 2 Dato V sp. vettoriale reale e data una funzione

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \|x\|$$

diremo che $\|\cdot\|$ è una norma se soddisfa:

1) $\forall x \in V \quad \|x\| \geq 0$ con uguaglianza che vale se e solo se $x = \bar{0}$

2) $\forall x \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

3) $\forall x, y \in V \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

ESEMPIO 2 Su $V = \mathcal{B}([0,1])$, $\forall f \in V$ definiamo

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

m è maggiorante per l'insieme A se e solo se λm è maggiorante per l'insieme $B = \{\lambda a \mid a \in A\}$

Verifichiamo che $\|\cdot\|_\infty$ è una norma.

Per (1) e (3) si procede in modo simile a d_∞. Per (2) si ha:

$$\|\lambda f(x)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda| \cdot |f(x)| = |\lambda| \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$$

Teorema 1 Dato V sp. vettoriale e $\|\cdot\|$ norma su V

$\forall x,y \in V$ definiamo $d(x,y) = \|x-y\|$, allora $d(x,y)$ è una distanza.

DIM. Usando il fatto che $\|\cdot\|$ soddisfa le 3 proprietà delle norme dobbiamo dimostrare che d soddisfa le 3 proprietà richieste nella definizione di spazio metrico.

1) Mostriamo che $d(x,y) \geq 0$

$\boxed{\text{con "=" che vale se e solo se } x = y}$

$$d(x,y) = \|x-y\| \geq 0$$

↑ perché $\|\cdot\|$ è norma

so anche che $\|x-y\| = 0$ se e solo se $x-y=\bar{0}$ cioè se e solo se $x=y$.

Quindi d soddisfa la prima proprietà della distanza.

2) Mostriamo che $d(x,y) = d(y,x)$

PER LA SECONDA PROPRIETÀ DELLE NORME

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)\cdot(y-x)\| =$$

$$= |-1| \cdot \|y-x\| = 1 \cdot d(y,x) = d(y,x)$$

3) Mostriamo che $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

$$d(x,z) = \|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \le$$

PER LA TERZA PROPRIETÀ DELLE NORME

$$\le \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z)$$

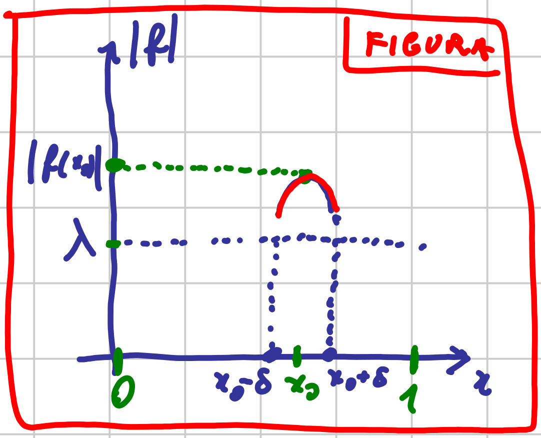
ESEMPIO 3 $V = C([0,1])$ e $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$

Mostriamo che $\|\cdot\|_1$ è una norma

1) $$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx \ge 0$$

ovvio

Per mostrare che uguaglianza vale se e solo se f è identicamente nulla si osservi che se così non fosse allora esisterebbe $x_0 \in (0,1)$ tale che $f(x_0) \neq 0$ quindi, grazie alla continuità di f esisterebbe $\lambda > 0$ e $\delta > 0$ tale che $|f(x)| > \lambda$ per ogni $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$.
(vedi figura)



Ma allora si avrebbe:

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx \ge \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \lambda\, dx = 2\delta\cdot\lambda > 0$$

(ASSURDO)

Quindi è assurdo che ci sia $x_0 \in (0,1)$ t.c. $f(x_0) \neq 0$. Ciò significa che f è identicamente nulla su $(0,1)$, e quindi, essendo continua, anche su $[0,1]$.

(2) Mostriamo che $\|\lambda f\|_1 \overset{?}{=} \lambda \cdot \|f\|_1$

$$\|\lambda f\|_1 = \int_0^1 |\lambda f(x)|\, dx = |\lambda| \underbrace{\int_0^1 |f(x)|\, dx}_{} =$$

$$= |\lambda| \cdot \|f\|_1$$

(3) $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$

$$\int_0^1 |f(x)+g(x)|\, dx \leq \int_0^1 |f(x)|+|g(x)|\, dx =$$

$$= \int_0^1 |f(x)|\, dx + \int_0^1 |g(x)|\, dx = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

Quindi abbiamo verificato che $\|\cdot\|_1$ è una norma.
Se poniamo $d_1(f,g) = \|f-g\|_1$, grazie al Teorema 1 otteniamo che d_1 è una distanza.

DEF. 3 Dato uno spazio metrico (M,d) e dati $f \in M$ e $\delta > 0$ definiamo l'intorno di f di raggio δ come l'insieme:

$$I_\delta(f) = \{ g \in M \mid d(g,f) < \delta \}$$

DEF 4 Dato (M,d) spazio metrico e dati $f \in M$ e (f_n) successione in M, diremo che $f_n \xrightarrow{d} f$ se:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \underbrace{\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } n \geq n_0}_{\text{definitivamente in } n} \Rightarrow d(f_n, f) < \varepsilon$$

NOTA A partire dal concetto di INTORNO si definiscono nel solito modo i concetti di: PARTE INTERNA, PARTE ESTERNA, FRONTIERA, CHIUSO, APERTO, DENSO, ECC.