Metodi Matematici - Lez. 2

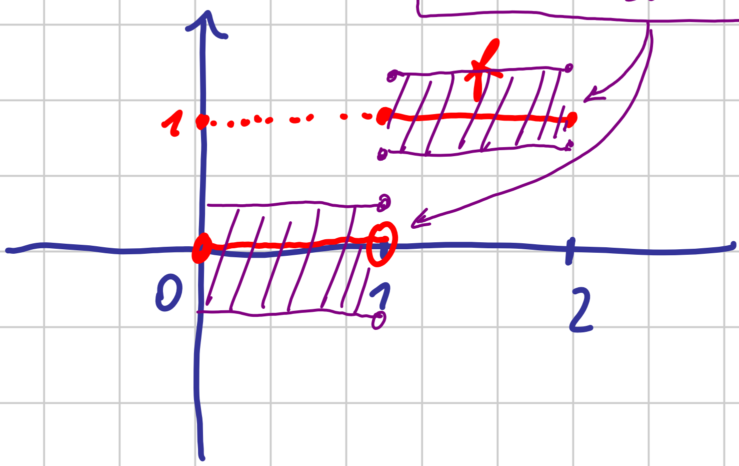
Titolo nota

25 settembre 2018 (9.30-11.15) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

ESEMPIO 1 $M = B([0,2], \|\cdot\|_\infty)$ e $f(x) = \chi_{[1,2]}(x)$

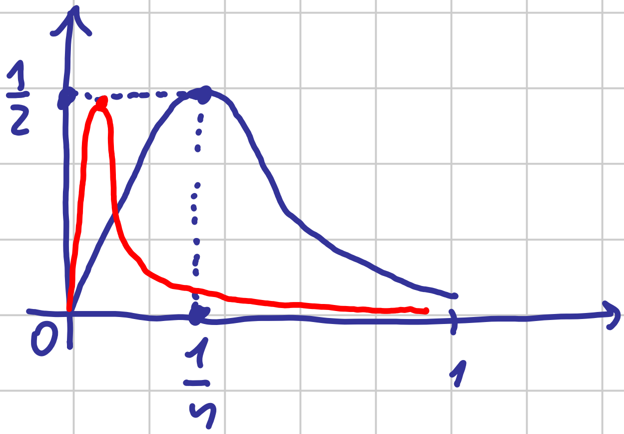
$\rho = \frac{1}{3}$, chi è $I_\rho(f)$?

È L'INSIEME DI TUTTE LE FUNZIONI IL CUI GRAFICO STA NELLA ZONA OMBREGGIATA



ESEMPIO 2 $C([0,1])$ $f_n(x) = \frac{nx}{1+(nx)^2}$ studiare convergenza rispetto a $\|\cdot\|_1$ e a $\|\cdot\|_\infty$

Preso $f(x) \equiv 0$ avremo che $f_n \xrightarrow{d_1} f$ ma $f_n \not\xrightarrow{d_\infty} f$. Infatti:



$$d_\infty(f_n, f) = \|f_n - f\|_\infty = \dots = \frac{1}{2}$$

invece

$$d_1(f_n, f) = \|f_n - f\|_1 = \int_0^1 \left| \frac{nx}{1+(nx)^2} \right| dx =$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{nx}{1+(nx)^2}\, n\, dx \underset{y=nx}{=} \frac{1}{2n}\int_0^n \frac{2y}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{2n}\ln(1+n^2) \to 0$$

PER $n \to +\infty$

DEF. 1 Dato V sp. vettoriale e date $\|\cdot\|$ e $|||\cdot|||$ norme su V, diremo che esse sono equivalenti se esistono $K_1 > 0$ e $K_2 > 0$ tali che

$$\|\cdot\| \leq K_1 |||\cdot|||$$

e

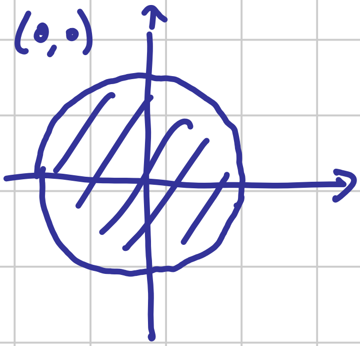
$$|||\cdot||| \leq K_2 \cdot \|\cdot\|$$

NOTA: SI OSSERVI CHE, SE DUE NORME SONO EQUIVALENTI, OGNI SUCCESSIONE CHE CONVERGE RISPETTO AD UNA DELLE DUE, CONVERGE ANCHE RISPETTO ALL'ALTRA.

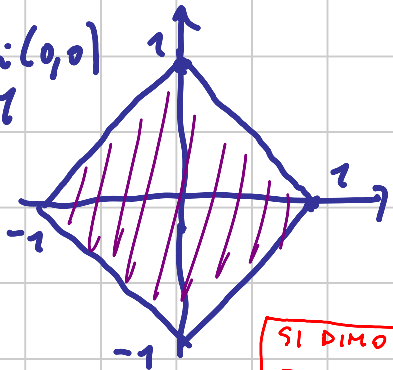
ESEMPIO 3 Prendiamo $\mathbb{R}^2$ con $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$

e anche con $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$

Intorno di $(0,0)$ di raggio 1 rispetto a $\|\cdot\|_2$



intorno di $(0,0)$ di raggio 1 rispetto a $\|\cdot\|_1$



$$\boxed{\sqrt{x^2+y^2} \leq |x| + |y| \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}$$

SI DIMOSTRA ELEVANDO TUTTO AL QUADRATO E UTILIZZANDO, QUANDO SERVE, IL FATTO CHE $x^2+y^2 \geq 2xy$

Quindi le due norme sono equivalenti

$$\|(x,y)\|_2 \leq \|(x,y)\|_1 \leq \sqrt{2}\cdot\|(x,y)\|_2$$

ESEMPIO 4

$C([0,1])$ con $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$

Si ha $\|\cdot\|_1 \le k \cdot \|\cdot\|_\infty$ perché $\forall f \in C([0,1])$ si ha:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx \le \int_0^1 \|f\|_\infty\,dx = \|f\|_\infty \cdot \int_0^1 1\,dx = \|f\|_\infty$$

La disuguaglianza opposta invece non ha speranza di essere dimostrata per colpa dell'esempio 2.

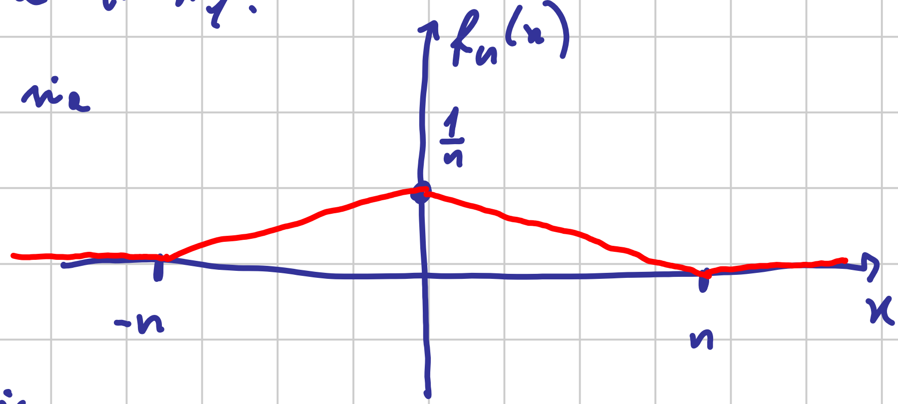
ESEMPIO 5

Continue a supporto compatto

$C_0(\mathbb{R})$ con $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$

Per mostrare che non può valere una disuguaglianza del tipo $\|\cdot\|_1 \le k\|\cdot\|_\infty$ basta mostrare che la convergenza rispetto a $\|\cdot\|_\infty$ non implica la convergenza rispetto a $\|\cdot\|_1$.

Per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ sia $f_n(x)$ la funzione in figura e $f(x) \equiv 0$. Si ottiene



$$\left.\begin{aligned} &d_1(f_n, f) = 1 \not\to 0 \\ &\text{ma} \\ &d_\infty(f_n, f) = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{c'è convergenza con } \|\cdot\|_\infty \text{ ma non con } \|\cdot\|_1$$

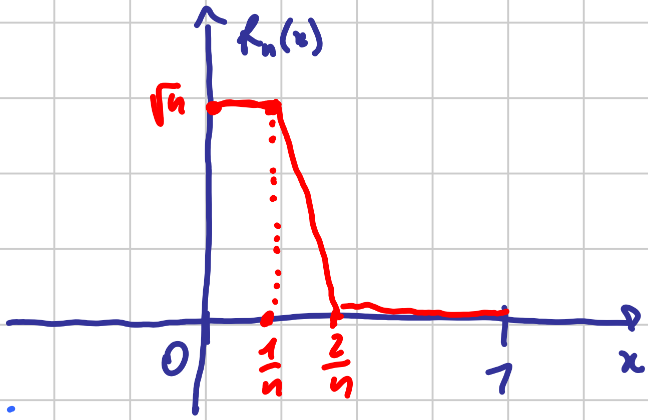
DEF. 2 Dato $C([0,1])$, per ogni $f \in C([0,1])$ definiamo:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (f(x))^2\, dx}$$

[VEDREMO TRA QUALCHE LEZIONE CHE È UNA NORMA]

ESEMPIO 6 Confrontare $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ in $C([0,1])$

Mostriamo che non può valere una disuguaglianza del tipo $\|\cdot\|_2 \le K \|\cdot\|_1$ esibendo una successione f_n (vedi figura) tale che $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} 0$ ma $f_n \overset{\|\cdot\|_2}{\not\to} 0$.



Infatti:

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(x)|\, dx \le \int_0^{\frac{2}{n}} \sqrt{n}\, dx = \sqrt{n} \cdot \int_0^{\frac{2}{n}} 1\, dx = \frac{2\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} \to 0$$

mentre

$$\|f_n\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (f_n(x))^2\, dx} \ge \sqrt{\int_0^{\frac{1}{n}} (\sqrt{n})^2\, dx} = \sqrt{n \int_0^{\frac{1}{n}} 1\, dx} =$$

$$= \sqrt{n \cdot \frac{1}{n}} = \sqrt{1} = 1 \not\to 0$$

Mostriamo invece che $\|\cdot\|_1 \le \underset{1}{K} \cdot \|\cdot\|_2$

Tra qualche lezione vedremo che, posto $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$, si riesce a dimostrare che $\langle f,g\rangle$ è un prodotto scalare e che $\|\cdot\|_2$ è la norma da lui indotta:

$$\left(\text{infatti: } \sqrt{\langle f,f\rangle} = \sqrt{\int_0^1 (f(x))^2\,dx} = \|f\|_2\right)$$

Vedremo anche che $|\langle f,g\rangle| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$

che prende il nome di disuguaglianza di Cauchy-Schwartz

Presupposto ciò, si ha:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx = \left|\int_0^1 |f(x)|\cdot 1\,dx\right| =$$

QUI SI USA CAUCHY-SCHWARTZ

$$= |\langle |f|, 1\rangle| \leq \||f|\|_2 \cdot \|1\|_2 =$$

$$= \|f\|_2 \cdot 1 = \|f\|_2$$

PER CASA

1) Confrontare $\|\ \|_2$ con $\|\ \|_1$ e $\|\ \|_\infty$ in $C_0(\mathbb{R})$.

2) Confrontare $\|\ \|_2$ e $\|\ \|_\infty$ in $C([0,1])$

3) Verificare che le funzioni lineari a tratti in $[0,1]$ sono dense in $C([0,1])$