Metodi Matematici - Lez. 3

Titolo nota

1 ottobre 2018 (14.00-15.45) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

ESEMPIO 1 (da lez. scorsa)

Dato $C([0,1])$ con $\|\cdot\|_\infty$ allora l'insieme

$$\mathcal{Z} = \{ f \in C([0,1]) \mid f \text{ è lineare a tratti} \}$$

è denso in $C([0,1])$.

SVOLGIMENTO

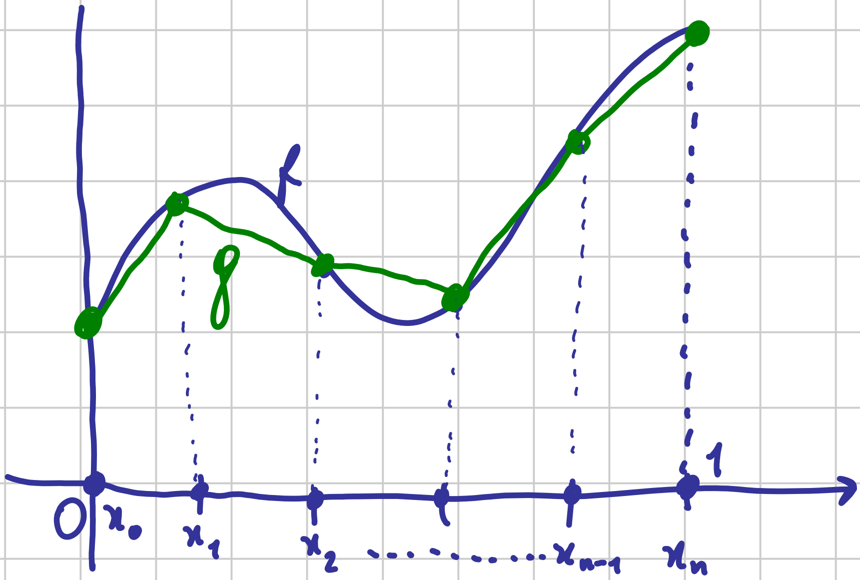
Dobbiamo dimostrare che $\forall f \in C([0,1])$ e $\forall \varepsilon > 0$

$\exists g \in \mathcal{Z}$ t.c. $\|f-g\|_\infty \leq \varepsilon$.

Ricordiamo che per il T. di Heine-Cantor. f è anche unif. continua in $[0,1]$ quindi

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c.

(✱) $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$



Quindi, $\forall \varepsilon > 0$, possiamo prendere $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ partizione di $[0,1]$ tale che $\forall i = 1, \dots, n$ $|x_i - x_{i-1}| < \delta$ dove $\delta > 0$ è stato scelto in modo che valga (✱).

Prendo ora g lineare a tratti che coincide con f nei punti di $\mathcal{P}$, mostriamo che $\|f-g\|_\infty < \varepsilon$.

Infatti $\forall i=1,\dots,n \quad \forall x\in[x_{i-1},x_i]$ si ha:

$$|f(x)-g(x)| = |f(x)-\underbrace{f(x_{i-1})+g(x_{i-1})}_{\text{SONO UGUALI}}-g(x)| \leq$$

$$\leq |f(x)-f(x_{i-1})| + |g(x_{i-1})-g(x)| \leq$$

$$\leq |f(x)-f(x_{i-1})| + |\underbrace{g(x_{i-1})}_{\text{UGUALI}}-\underbrace{g(x_i)}_{\text{UGUALI}}| \leq$$

$$\leq |f(x)-f(x_{i-1})| + |f(x_{i-1})-f(x_i)| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Siccome ciò vale $\forall x\in[0,1]$ si ha: $\sup_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)| \leq \varepsilon$

cioè

$$\|f-g\|_\infty \leq \varepsilon$$

COMPLETEZZA

DEF. 1 Dato (M,d) spazio metrico e data $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione a valori in M, diremo che (f_n) è di Cauchy se:

$$\forall \varepsilon>0 \ \underbrace{\exists n_0\in\mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n,m\geq n_0}_{\text{definitivamente in } n,m} \text{ si ha } d(f_n,f_m)<\varepsilon$$

TEO. 1 Dato (M, d) sp. metrico e (f_n) succ. in M, se $f_n \to f \in M$ allora (f_n) è di Cauchy.

DIMO $\forall \varepsilon > 0$ so che $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq n_0$ si ha $d(f_n, f) < \frac{\varepsilon}{2}$, perché so che $f_n \to f$. Ma allora $\forall n, m \geq n_0$ si ha:

$$d(f_n, f_m) \leq d(f_n, f) + d(f, f_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

TEO. 2 Dato (M, d) spazio metrico, se (f_n) è una successione di Cauchy in (M, d) allora è limitata, cioè esiste una palla in M che la contiene tutta.

DIM Poiché (f_n) è di Cauchy, preso $\varepsilon = 1$, si ha che $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n, m \geq n_0$ $d(f_n, f_m) < 1$.

In particolare $\forall n \geq n_0$ si ha $d(f_n, f_{n_0}) < 1$.

Prendo ora

$$r = \text{MAX}\{1, d(f_{n_0}, f_0), d(f_{n_0}, f_1), \ldots, d(f_{n_0}, f_{n_0-1})\}$$

Avremo che $\forall n \in \mathbb{N}$ $d(f_{n_0}, f_n) \leq r < r+1$

Quindi la palla cercata è quella di centro f_{n_0} e raggio $r+1$.

DEF 2 Dato uno spazio metrico (M, d) diremo che esso [è completo] se ogni successione (f_n) in M che sia di Cauchy è necessariamente anche convergente.

DEF. 3 Uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ si dice spazio di Banach se è completo rispetto alla metrica indotta da $\|\cdot\|$.

ESEMPIO 2 $B([0,1])$ con $\|\cdot\|_\infty$ è di Banach.

Vogliamo mostrare che se (f_n) è una successione di Cauchy in $B([0,1])$, allora esiste $f \in B([0,1])$ t.c. $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} f$.

Se (f_n) è di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_\infty$ allora:

$\forall \varepsilon > 0$ def. in n, m $\quad \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$. PERCHÉ $\le$

A maggior ragione quindi, per ogni x fissato in $[0,1]$ si ha:

$\forall \varepsilon > 0$ def. in n, m $\quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Ciò significa che $\forall$ fissato $x \in [0,1]$ la successione $(f_n(x))$ è di Cauchy e quindi, essendo $\mathbb{R}$ completo, è convergente, cioè $\forall x \in [0,1]$ esiste finito
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Quindi posso definire la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$$

Mostriamo ora che la funzione così definita sta in $B([0,1])$

A tale scopo ricordiamo che (f_n), essendo di Cauchy,

è limitata in $B([0,1])$, cioè $\exists M > 0$ tale che

$$\|f_n\|_\infty < M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cioè $\exists M > 0$ t.c. $\forall x \in [0,1]$ e $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x)| < M$$

Da cui, passando al limite per $n \to +\infty$ si ottiene che:

$$\forall x \in [0,1] \quad \Big|\underbrace{\lim_{n \to +\infty} f_n(x)}_{f(x)}\Big| \leq M$$

Ciò significa che f è una funzione limitata.

Mostriamo ora che $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$

Poiché (f_n) è di Cauchy si ha che

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n, m \geq n_0$ si ha $\underbrace{\|f_n - f_m\| < \varepsilon}$

Quindi $\forall x \in [0,1] \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Ma allora, passando al limite per $m \to +\infty$ si ottiene che

$$\forall x \in [0,1] \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Da cui segue che

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

cioè che

$$\| f_n - f \|_\infty \leq \varepsilon$$

Ho quindi dimostrato che

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq n_0$ si ha $\| f_n - f \|_\infty \leq \varepsilon$

Ciò significa che $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$

ESEMPIO 3 $C([0,1])$ con la norma $\| \cdot \|_\infty$ è di Banach.

Devo dimostrare che presa (f_n) in $C([0,1])$ di Cauchy, deve necessariamente esistere $f \in C([0,1])$ t.c. $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} f$.

Poiché $C([0,1]) \subset B([0,1])$ e so che $B([0,1])$ è completo con $\| \cdot \|_\infty$, sono sicuro che $\exists f \in B([0,1])$ t.c. $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$. Per concludere basta mostrare che anche f è continua.

Mostriamo che $\forall x_0 \in [0,1]$, f è continua in x_0, cioè che: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Grazie al fatto che $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ so che

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq n_0$ si ha $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$

Prendo ora $\delta > 0$ t.c. $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (posso farlo perché f_{n_0} è continua).

Ottengo quindi che:

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \leq$$

$$\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \leq$$

$$\leq \|f - f_{n_0}\| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + \|f - f_{n_0}\| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Quindi f è continua in x_0, $\forall x_0 \in [0,1]$, quindi $f \in C([0,1])$

TEO. 3 Sia (M, d) spazio metrico completo e sia $K \subset M$. Allora K è chiuso se e solo se (K, d) è completo.

ESEMPI DA FARE A CASA

1) $C^1([0,1])$ con $\|\cdot\|_\infty$ non è completo

2) $C^1([0,1])$ con $\|\cdot\|_{\infty,1}$ è di Banach

dove $\|f\|_{\infty,1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$

3) $C([0,1])$ con $\|\cdot\|_1$ non è completo.