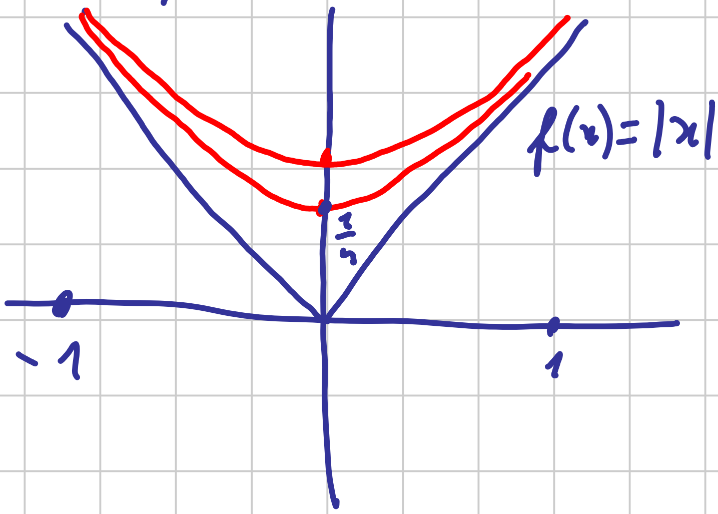
Metodi Matematici - Lez. 4

Titolo nota

2 ottobre 2018 (9.30-11.15) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

$\boxed{\text{ESEMPIO 1}}$ $C^1([-1,1])$ con $\|\cdot\|_\infty$ non è completo.

Basta mostrare che come sottoinsieme di $C([-1,1])$ non è chiuso, cioè basta esibire una successione (f_n) in $C^1([-1,1])$ il cui limite sia $f \notin C^1([-1,1])$.



Ad esempio prendiamo

$f(x)=|x|$ e

$f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$

$$|f_n(x)-f(x)| = \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{x^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{x^2}} \leq \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}$$

quindi:

$$\|f_n-f\|_\infty = \frac{1}{n} \Rightarrow f_n \xrightarrow{\|\,\|_\infty} f$$

$\boxed{\text{ESEMPIO 2}}$ $C^1([0,1])$ con $\overbrace{\|f\|_{\infty,1}}^{\|\cdot\|} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$

è di Banach.

Dobbiamo mostrare che se (f_n) è di Cauchy rispetto a $\| \ \|$ allora $\exists f \in C^1([0,1])$ t.c.

$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} f$.

Se (f_n) è di Cauchy significa che (f_n) e (f'_n) sono di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_\infty$.

Essendo $C([0,1])$ completo otteniamo che (f_n) e (f'_n) sono convergenti in $C([0,1])$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$.

Cioè so che $\exists^{\text{no}}$ $f, g \in C([0,1])$ t.c.

$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$

$f'_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} g$

Per concludere rimane da dimostrare che

$\forall x \in [0,1]$ $f'(x) = g(x)$

A tale scopo si osservi che $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha:

$$f_n(x) = f_n(0) + \int_0^x f_n'(t)\,dt$$

$$\left| \int_0^x f_n'(t)\,dt - \int_0^x g(t)\,dt \right| \leq \int_0^x |f_n'(t) - g(t)|\,dt \leq$$

$$\leq \int_0^x \|f_n' - g\|_\infty\,dt = x \cdot \|f_n' - g\|_\infty \leq$$

$$\leq \|f_n' - g\|_\infty \to 0$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ si ha

$$f(x) = f(0) + \int_0^x g(t)\,dt$$

da cui segue

$$f'(x) = g(x)$$

per il T. fond. del calcolo integrale.

Quindi

$$\|f_n - f\| = \|f_n - f\|_\infty + \|f_n' - f'\|_\infty \to 0$$

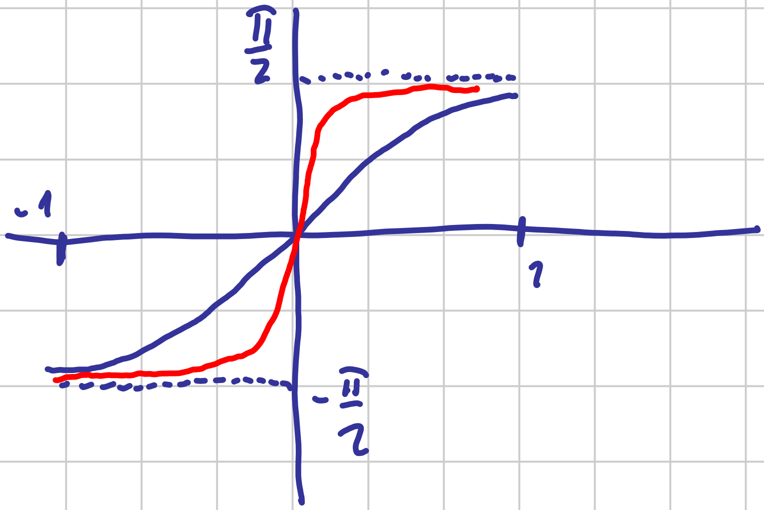
cioè

$$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} f$$

$\boxed{\text{ESEMPIO 3}}$ $C([-1,1])$ non è completo con $\|\cdot\|_1$

Dobbiamo trovare (f_n) in $C([0,1])$ che sia di Cauchy ma che non converge ad alcuna $f \in C([0,1])$

Prendiamo $f_n(x) = \arctan(nx)$.



$n \geq m$

$$\|f_n - f_m\|_1 = 2\int_0^1 (\arctan nx - \arctan mx)\,dx =$$

$$= 2\left(\underbrace{\arctan n - \arctan m}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{2n}\ln(1+n^2)}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{2m}\ln(1+m^2)}_{\to 0}\right)$$

$$\frac{1}{n}\int_0^1 \arctan nx\,(n\,dx) = \frac{1}{n}\int_0^n (y)'\cdot \arctan y\,dy =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\left[y \arctan y\right]_0^n - \frac{1}{2}\int_0^n \frac{2y}{1+y^2}\,dy\right)$$

$$= \boxed{\arctan n - \frac{1}{2n}\ln(1+n^2)}$$

Se prendo invece del tipo $[\delta, 1]$ o $[-1, \delta]$

trovo che in $C([\delta,1])$ si ha $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} \frac{\pi}{2}$

e in $C([-1,-\delta])$ si ha $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} -\frac{\pi}{2}$.

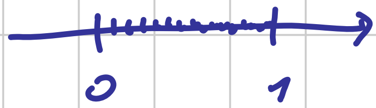
Se esistesse $f(x) \in C([-1,1])$ t.c. $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$ allora tale f dovrebbe valere $\frac{\pi}{2}$ in tutti gli intervalli del tipo $[\delta, 1]$ e $-\frac{\pi}{2}$ in tutti quelli del tipo $[-1, \delta]$, quindi $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$, quindi f non può essere continua.

Quindi (f_n) non è convergente.

Quindi $C([-1,1])$ non è completo.

MISURA DI LEBESGUE

ESEMPIO 4 Prendiamo $\mathbb{Q} \cap [0,1]$



Sappiamo già che non è misurabile secondo Peano-Jordan. Osserviamo però che se si potessero usare plurirettangoli costituiti da una quantità numerabile di rettangoli si riuscirebbe a mostrare che ha misura esterna nulla. Infatti sia (q_n) una successione che ricopre $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ (esiste perché è un insieme numerabile). $\forall \varepsilon > 0$ prendiamo una sequenza di intervalli (I_n) t.c. $q_n \in I_n$ e $\text{lunghezza}(I_n) = \frac{\varepsilon}{2^n}$. Ovviamente il "plurirettangolo" $\bigcup I_n$ ricopre $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ ma la somma delle misure dei suoi intervalli è $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \cdot \sum \frac{1}{2^n} = \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$.

DEF. 1 Dato un plurirettangolo in $\mathbb{R}^n$ la sua misura è quella definita quando si è fatto Peano-Jordan. (è ben posta).

DEF. 2 Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, definiamo

$$m(A) = \sup \left\{ m(P) \;\middle|\; P \text{ è plurirettangolo t.c. } P \subset A \right\}$$

DEF 3 Dato $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto, definiamo

$$m(K) = \inf \left\{ m(P) \;\middle|\; P \text{ è plurirettangolo t.c. } K \subset P \right\}$$

OSS 1 Poiché i plurirettangoli sono compatti, per cui abbiamo a disposizione 2 definizioni di misura: DEF 1 e DEF 3, tuttavia esse sono coerenti tra loro perché se K è un plurirettangolo, allora il più piccolo plurirettangolo che lo contiene è lui stesso.

DEF. 4 Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ definiamo

$$\underline{m}(E) = \sup \left\{ m(K) \;\middle|\; K \subset E \text{ compatto} \right\}$$

$$\overline{m}(E) = \inf \left\{ m(A) \;\middle|\; A \supset E \text{ aperto} \right\}$$

TEO. 1 Dati $K\subset A\subset\mathbb{R}^n$ con K compatto e A aperto, esiste sempre un plurirettangolo P tale che $K\subset P\subset A$.

DEF. 5 Dati $A,B\subset\mathbb{R}^n$ definiamo:

$$d(A,B)=\inf\{d(x,y)\mid x\in A,\ y\in B\}$$

In particolare, se A è costituito da un solo punto x, definiamo

$$d(x,B)=\inf\{d(x,y)\mid y\in B\}$$

LEMMA 0 Se $C\subset\mathbb{R}^n$ è un sottoinsieme chiuso e $x_0\in\mathbb{R}^n$ allora $\exists\, y_0\in C$ t.c. $d(x_0,C)=d(x_0,y_0)$.

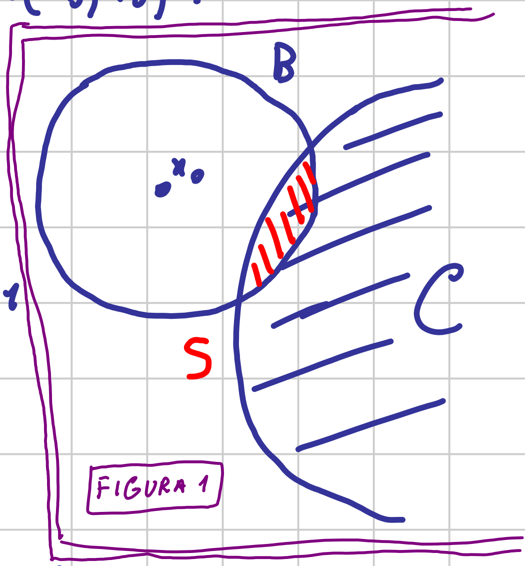


FIGURA 1

DIM. LEMMA 0 Sia B una palla chiusa con centro x_0 e raggio sufficientemente grande da intersecare C, vedi figura 1. Detto $S=B\cap C$, S è chiuso perché intersezione di chiusi, e limitato perché contenuto nella palla B. Quindi S è compatto. D'altra parte la funzione $y\overset{F}{\longmapsto} d(x_0,y)$ è continua (anzi Lipschitziana) grazie alla disuguaglianza triangolare perché:

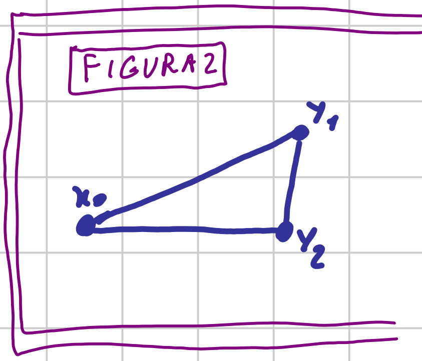


FIGURA 2

$$|F(y_1)-F(y_2)|=|d(x_0,y_1)-d(x_0,y_2)|\le d(y_1,y_2)$$

(vedi figura 2)

Di conseguenza, per il teorema di Weierstrass, esiste un punto y_0 che minimizza la funzione continua F nel compatto S, cioè esiste $y_0\in S$ tale che $d(x_0,y_0)=d(x_0,S)=d(x_0,C)$

L'ULTIMA UGUAGLIANZA È OVVIA PERCHÉ S È COSTITUITO DAI PUNTI DI C PIÙ VICINI A x_0

LEMMA 1 Dati $K, C \subset \mathbb{R}^n$, disgiunti e tali che K è compatto e C è chiuso, allora $d(K,C) > 0$.

DIMO LEMMA 1 Mostriamo innanzitutto che la funzione $F: x \longmapsto d(x,C)$ è una funzione continua (anzi Lipschitziana).

Infatti $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ siano $y_1, y_2 \in C$ tali che $d(x_1, C) = d(x_1, y_1)$ e $d(x_2, C) = d(x_2, y_2)$ (vedi figura 3).

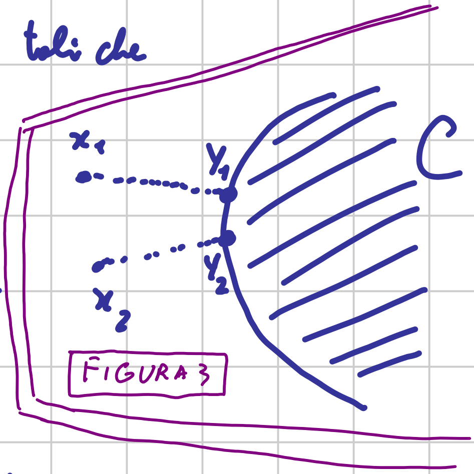


FIGURA 3

Senza perdere di generalità si può supporre che sia $d(x_1, C) > d(x_2, C)$.

Di conseguenza

$$|F(x_1) - F(x_2)| = |d(x_1, C) - d(x_2, C)| =$$

$$= d(x_1, C) - d(x_2, C) =$$

$$= d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2) \leq$$

PERCHÈ y_1 È IL PUNTO DI C CHE HA DISTANZA MINIMA DA x_1

$$\leq d(x_1, y_2) - d(x_2, y_2) \leq d(x_1, x_2)$$

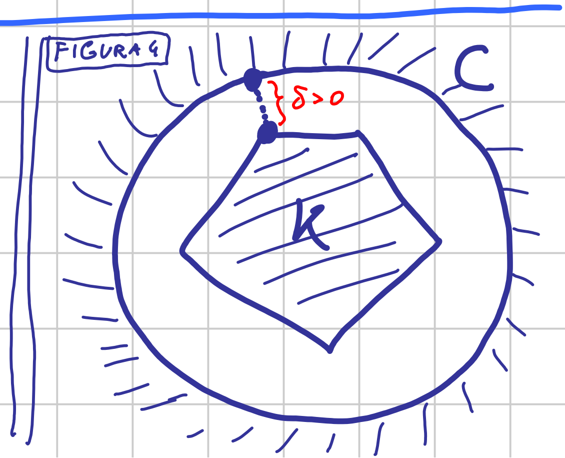
PER LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

Ciò significa che $F(x) = d(x, C)$ è una funzione Lipschitziana e quindi anche continua.

Ma allora, essendo K compatto, per il T. di Weierstrass esiste $x_0 \in K$ tale che $d(x, C)$ è minima, e quindi

$$d(K, C) = d(x_0, C) > 0.$$

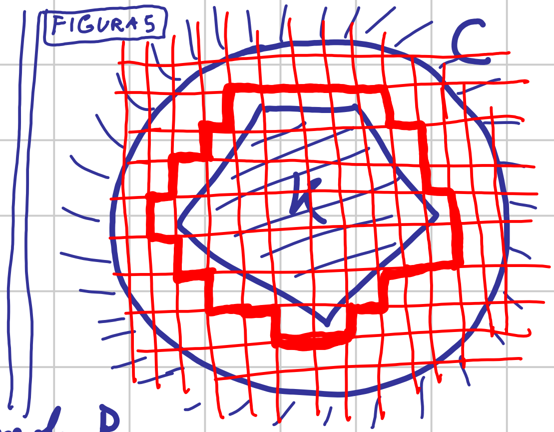
DIMO TEO. 1 Sia $C = A^c$. Poiché A è aperto, C è chiuso. Inoltre K e C sono disgiunti perché $K \subset A$. (vedi figura 4).



Dal lemma 1 sappiamo che

$d(K, C) = \delta > 0$.

Basterà quindi prendere una partizione (vedi fig 5) tale che la diagonale dei quadretti sia $< \delta$. In tal modo



Basterà prendere come plurirettangolo P quello costituito da tutti e soli i quadretti che intersecano K. Infatti P è tutto contenuto in A perché altrimenti dovrebbe esistere un quadretto che interseca sia K che C, ma ciò è impossibile perché la diagonale del quadretto è minore della distanza δ tra C e K.