Metodi Matematici - Lez. 5

Titolo nota

8 ottobre 2018 (14.00-15.45) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

$\boxed{\text{OSS 1}}$ $\forall E \subset \mathbb{R}^n \quad \underline{m}(E) \leq \overline{m}(E)$

Per dimostrarlo ricordiamo che:

$$\underline{m}(E) = \sup\{m(K) \mid K \text{ compatto t.c. } K \subset E\}$$
$$\overline{m}(E) = \inf\{m(A) \mid A \text{ aperto t.c. } E \subset A\}$$

Basterà quindi mostrare che $\forall K$ compatto e $\forall A$ aperto t.c. $K \subset E \subset A$ si ha $m(K) \leq m(A)$.
Ma siccome $m(K)$ è l'inf. delle misure dei plurirettangoli contenenti K, mentre $m(A)$ è il sup. delle misure dei plurirettangoli contenuti in A, per mostrare che $m(K) \leq m(A)$ basta mostrare che c'è un plurirettangolo P tale che $K \subset P \subset A$, ma questo è garantito dal Teorema 1 della Lezione 4.

$\boxed{\text{DEF. 1}}$ Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ diremo che esso è un insieme misurabile secondo Lebesgue con misura finita $\lambda \in \mathbb{R}^+$ se $\underline{m}(E) = \overline{m}(E) = \lambda$. Tale $\lambda \in \mathbb{R}^+$ prende il nome di misura di Lebesgue di E e si indica col simbolo $m(E)$.

$\boxed{\text{DEF. 2}}$ Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ diremo che E è un insieme misurabile secondo Lebesgue con misura infinita se $\underline{m}(E) = \overline{m}(E) = +\infty$ ed inoltre, per ogni $\rho > 0$ $E \cap I_\rho(\bar{0})$ è un insieme misurabile di misura finita. In tal caso diremo che la misura di Lebesgue di E è $m(E) = +\infty$.

$\boxed{\text{NOTAZIONE}}$ Nel seguito indicheremo con $\mathcal{M}$ la famiglia di tutti gli $E \subset \mathbb{R}^n$ che sono misurabili con misura finita o infinita e indicheremo con $m(E)$ la misura dell'insieme E. Si noti che se E fosse aperto o compatto $m(E)$ sarebbe già stato definito in altro modo, tuttavia la nuova definizione per $m(E)$ dà lo stesso risultato di quella vecchia (vedi, più sotto, osservazione 3)

$\boxed{\text{OSS.2}}$ $\underline{m}$, $\overline{m}$ ed m sono monotone, cioè se $E \subset F \subset \mathbb{R}^n$ allora $\underline{m}(E) \leq \underline{m}(F)$, $\overline{m}(E) \leq \overline{m}(F)$ e, se $E, F \in \mathcal{M}$, anche $m(E) \leq m(F)$.

Per mostrare che $\underline{m}(E) \leq \underline{m}(F)$ basta ricordare che

(1) $$\underline{m}(E) = \sup\{m(K) \mid K \text{ compatto con } K \subset E\}$$

(2) $$\underline{m}(F) = \sup\{m(K) \mid K \text{ compatto con } K \subset F\}$$

Dal fatto che $E \subset F$ segue che per ogni compatto K, se $K \subset E$ è anche $K \subset F$. Di conseguenza l'insieme di cui si fa il sup. al punto (1) è contenuto nell'insieme di cui si fa il sup al punto (2). Quindi il sup. al punto (1) non può superare il sup al punto (2). Quindi $\underline{m}(E) \leq \underline{m}(F)$.

Per dimostrare che $\overline{m}(E) \leq \overline{m}(F)$ si ragiona in modo simile, usando gli aperti al posto dei compatti e l'inf. al posto del sup.

Infine, per mostrare che $m(E) \leq m(F)$ basta ricordare che se E ed F sono misurabili allora $m(E) = \underline{m}(E) = \overline{m}(E)$ ed $m(F) = \underline{m}(F) = \overline{m}(F)$, quindi tutte le disuguaglianze dimostrate per $\underline{m}$ o $\overline{m}$ valgono anche per m.

OSS. 3 Ogni $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto è misurabile secondo Lebesgue e la sua misura di Lebesgue coincide con la sua misura già definita come aperto.

Per verificare la nostra affermazione bisogna mostrare che, detta:

$$m(A) = \sup\{m(P) \mid P \text{ plurirettangolo t.c. } P \subset A\}$$

si ha sia $\underline{m}(A) = m(A)$ sia $\overline{m}(A) = m(A)$.

Il fatto che $\overline{m}(A) = m(A)$ è ovvio perché $\overline{m}(A)$ è l'inf delle misure degli aperti che contengono A quindi, essendo A aperto, il più piccolo aperto che lo contiene è lui stesso.

Per mostrare che $\underline{m}(A) = m(A)$ invece si ricordi che:

(3) $$m(A) = \sup\{m(P) \mid P \text{ plurirettangolo t.c. } P \subset A\}$$

(4) $$\underline{m}(A) = \sup\{m(K) \mid K \text{ compatto t.c. } K \subset A\}$$

Poiché ogni plurirettangolo è anche un compatto, l'insieme di cui si fa il sup in (3) è un sottoinsieme di quello di cui si fa il sup. in (4). Da ciò segue che $m(A) \leq \underline{m}(A)$. Ma non può essere $m(A) < \underline{m}(A)$ perché vediamo già che $m(A) = \overline{m}(A)$. Quindi $m(A) = \underline{m}(A)$

Abbiamo quindi mostrato che $\underline{m}(A)$ ed $\overline{m}(A)$ sono entrambe uguali alla misura di A come insieme aperto. Di conseguenza A è misurabile secondo Lebesgue e la sua misura di Lebesgue coincide con la sua misura come insieme aperto. Non c'è quindi ambiguità ad usare per entrambe la stessa notazione $m(A)$.

$\boxed{\text{OSS. 4}}$ Ogni $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto è misurabile secondo Lebesgue e la sua misura di Lebesgue coincide con la sua misura già definita come compatto.
La dimostrazione è analoga a quella fatta nell'osservazione 3 per gli aperti.

$\boxed{\text{OSS 5}}$ Ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ limitato che sia misurabile secondo Peano-Jordan è misurabile anche secondo Lebesgue e la misura è la stessa.
Ricordiamo che misure interna ed esterna di Peano-Jordan sono definite da:

$$\underline{\mu}(E) = \sup\{m(P) \mid P \text{ plurirettangolo con } P \subset E\}$$

(5) $$\overline{\mu}(E) = \inf\{m(P) \mid P \text{ plurirettangolo con } E \subset P\}$$

Poiché:

$$\underline{m}(E) = \sup\{m(K) \mid K \text{ compatto con } K \subset E\}$$

e poiché i plurirettangoli sono particolari compatti, segue che $\underline{\mu}(E) \leq \underline{m}(E)$.
Inoltre per ogni plurirettangolo P e per ogni $\varepsilon > 0$ è sempre possibile trovare un aperto A tale che $P \subset A$ e $m(A) \leq m(P) + \varepsilon$ (basta prendere A unione di rettangoli senza bordo "un po' più grandi" di quelli di P).
Da ciò segue che, $\forall \varepsilon > 0$ si ha:

$$\overline{m}(E) = \inf\{m(A) \mid A \text{ aperto con } E \subset A\} \leq \overline{\mu}(E) + \varepsilon$$

da cui, data l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, segue che $\overline{m}(E) \leq \overline{\mu}(E)$
Quindi, per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ limitato, abbiamo ottenuto:

(6) $$\underline{\mu}(E) \leq \underline{m}(E) \leq \overline{m}(E) \leq \overline{\mu}(E).$$

Dire che E è misurabile secondo Peano-Jordan significa dire che $\underline{\mu}(E)=\overline{\mu}(E)$ quindi, grazie a (6), da ciò segue che vale anche $\underline{m}(E)=\overline{m}(E)$, quindi E è misurabile secondo Lebesgue.

TEOREMA 1 La famiglia $\mathcal{M}$ degli insiemi misurabili secondo Lebesgue ha le seguenti proprietà:

1) $\emptyset \in \mathcal{M}$
2) se $E \in \mathcal{M}$ anche $E^C \in \mathcal{M}$
3) se $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ è una successione in $\mathcal{M}$, allora anche $E=\bigcup_{i=0}^{n} E_i$ sta ancora in $\mathcal{M}$.

OSS. 6 Del teorema 1 omettiamo la dimostrazione. Ci limitiamo a far notare che grazie alla proprietà 3), tutti gli insiemi numerabili (quindi anche $\mathbb{Q}$) sono misurabili perché unione numerabile dei loro punti.

TEOREMA 2 Sia $\mathcal{M}$ la famiglia degli insiemi misurabili e sia m la misura di Lebesgue. Allora valgono le proprietà

1) $m(\emptyset)=0$
2) Se $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ è una successione in $\mathcal{M}$, e gli E_i sono tutti a 2 a 2 disgiunti allora $m\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} E_i\right)=\sum_{i=0}^{+\infty} m(E_i)$

COROLLARIO 1 Se $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ è una successione di insiemi misurabili tali che $\forall i \in \mathbb{N}$ $E_i \subset E_{i+1}$, allora $m\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i\right)=\lim_{n\to+\infty} m(E_n)$.

DIMOSTRAZIONE

Poniamo $B_0=E_0$, dopodiché per ogni $i\in\mathbb{N}$ poniamo $B_{i+1}=E_{i+1}-E_i$. I B_i così ottenuti sono tutti disgiunti. Inoltre $B_0 \cup B_1 \cup \cdots \cup B_n = E_n$

e $\bigcup_{i=0}^{+\infty} E_i = \bigcup_{i=0}^{+\infty} B_i$. Posso quindi applicare il teorema 2 alla successione $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ e ottenere:

$$m\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} E_i\right) = m\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} B_i\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} m(B_i) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} m(B_i) = \lim_{n \to +\infty} m(E_n)$$

PER IL TEOREMA 2

PER LA DEFINIZIONE DI SOMMA DI UNA SERIE

PERCHÈ E_n È UNIONE DISGIUNTA DI $B_0, B_1, \dots, B_n$