Metodi Matematici - Lez. 6

Titolo nota

9 ottobre 2018 (9.30-11.15) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

OSS. 1 Se $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ è una successione di insiemi misurabili allora anche $E=\bigcap_{i=0}^{+\infty} E_i$ è misurabile. Infatti:

$$E=\bigcap_{i=0}^{+\infty} E_i = \left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} E_i^c\right)^c = \text{insieme misurabile}$$

$\left(x\in\bigcap_{i=0}^{+\infty} E_i\right) \iff \left(\forall i\in\mathbb{N}\ \ x\in E_i\right) \iff \left(\forall i\in\mathbb{N}\ \ x\notin E_i^c\right) \iff$

$\iff \left(x\notin\bigcup_{i=0}^{+\infty} E_i^c\right) \iff \left(x\in\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} E_i^c\right)^c\right)$

$(E_i$ misurabile $\forall i\in\mathbb{N}) \Rightarrow$
$\Rightarrow (E_i^c$ misurabile $\forall i\in\mathbb{N}) \Rightarrow$
$\Rightarrow \bigcup_{i=0}^{+\infty} E_i^c$ è misurabile $\Rightarrow$
$\Rightarrow \left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} E_i^c\right)^c$ è misurabile

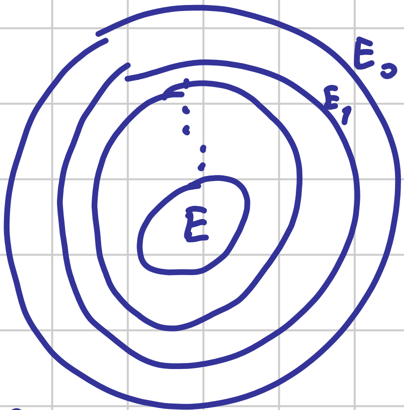
(tutte queste implicazioni seguono dal TEO. 1 LEZ. 5)

COROLL. 1 Se $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ è una successione in $\mathcal{M}$ t.c. $\forall i\in\mathbb{N}$ $E_i\supset E_{i+1}$ e $m(E_0)$ è finito allora $\lim_{n\to+\infty} m(E_n)=m(E)$ dove $E=\bigcap_{i=0}^{+\infty} E_i$.

DIM $\forall i\in\mathbb{N}$ poniamo

$B_i = E_0 - E_i$.

Dal fatto che $E_i\supset E_{i+1}$ segue che $B_i\subset B_{i+1}$ quindi alla succ. $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ posso applicare il Cor. 1 della lez. 5. e, posto $B=\bigcup_{i=0}^{+\infty} B_i$, dire che:



PERCHÉ $m(E_0)$ è FINITA

(1) $$m(B)=m\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} B_i\right)=\lim_{n\to+\infty} m(B_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(m(E_0)-m(E_n)\right) = m(E_0)-\lim_{n\to+\infty} m(E_n)$$

$\left((E_n\subset E_0) \text{ e } (B_n=E_0-E_n)\right) \Rightarrow \left(E_0 = \underbrace{E_n \cup B_n}_{\text{DISGIUNTA}}\right) \Rightarrow \left(m(E_0)=m(E_n)+m(B_n)\right) \Rightarrow \left(m(B_n)=m(E_0)-m(E_n)\right)$

PERCHÉ $m(E_0)$ è FINITA

Mostriamo inoltre che E_0 è unione disgiunta di E e B.

Infatti E e B sono disgiunti perché:

$$\left(x\in E\right)\Leftrightarrow\left(x\in\bigcap_{i=0}^{+\infty}E_i\right)\Leftrightarrow\left(\forall i\in\mathbb{N}\ \ x\in E_i\right)\overset{(*)}{\Rightarrow}\left(\forall i\in\mathbb{N}\ \ x\notin B_i\right)\Leftrightarrow\left(x\notin\bigcup_{i=0}^{+\infty}B_i\right)$$

PERCHÉ $\forall i\in\mathbb{N}\ \ B_i=E_0-E_i$

Si noti che se sappiamo già che $x\in E_0$, l'implicazione $(*)$ diventa una doppia implicazione, quindi possiamo dire che:

$$\forall x\in E_0 \text{ si ha che } x\in E\Leftrightarrow x\notin B$$

che equivale a dire che:

$$E_0=E\cup B \qquad (\text{dove l'unione è disgiunta})$$

di conseguenza:

$$m(E_0)=m(E)+m(B)$$

da cui, essendo $m(E_0)$ finita, segue che:

(2) $$m(B)=m(E_0)-m(E)$$

Combinando (1) e (2) si ottiene:

$$m(E_0)-m(E)=m(E_0)-\lim_{n\to+\infty}m(E_n)$$

da cui, sempre ricordando che $m(E_0)$ è finito, segue che:

$$m(E)=\lim_{n\to+\infty}m(E_n)$$

che è la tesi.

OSS. 2 Se E ed F con $E\subset F\subset\mathbb{R}^n$ sono insiemi misurabili tali che $m(E)=m(F)<+\infty$ allora ogni insieme H t.c. $E\subset H\subset F$ è pure misurabile e $m(H)=m(E)=m(F)$.

In particolare se G è misurabile e $m(G)=0$ allora tutti i sottoinsiemi di G sono misurabili ed hanno misura 0.

INTEGRALE DI LEBESGUE

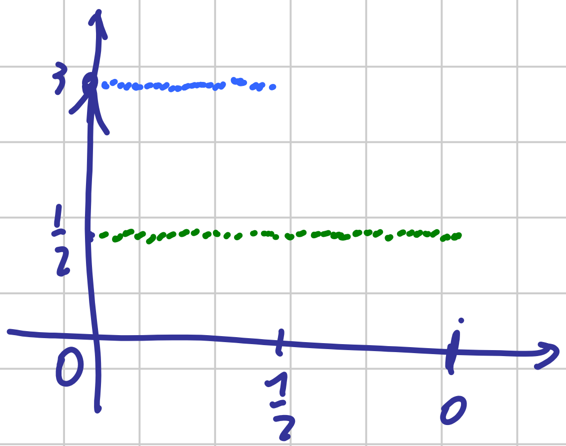
DEF 1 Una funzione $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice *funzione semplice* se è esprimibile come combinazione lineare di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili disgiunti e con misura finita, cioè se esistono $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ e $E_1, E_2, \dots, E_n$ misurabili di misura finita e tutti a due a due disgiunti, tali che:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}(x)$$

ESEMPIO 1

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}(x) + 3 \chi_{[0,\frac{1}{2}] - \mathbb{Q}}(x)$$

è una funzione semplice il cui grafico è:



È STATA EVIDENZIATA CON COLORI DIVERSI LA PARTE DI GRAFICO DOVUTA A CIASCUNO DEI 2 TERMINI

DEF. 2 Sia $\varphi(x)$ una funzione semplice data da $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}(x)$ con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ e $E_1, E_2, \dots, E_n$ misurabili disgiunti e con misura finita.

Definiamo

$$\int \varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, m(E_i)$$

OSS 3 Poiché una funzione semplice è esprimibile in più modi come combinazione lineare di χ_{E_i}, bisogna porsi il problema della buona positura, cioè mostrare che prendendo 2 rappresentazioni diverse si ottiene lo stesso valore.
Date dunque due rappresentazioni della stessa φ, cioè supponendo che valga

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{E_i}(x) \quad e \quad \varphi(x)=\sum_{j=1}^{k}\beta_j\chi_{F_j}(x)$$

si tratta di dimostrare che:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i m(E_i)=\sum_{j=1}^{k}\beta_j m(F_j)$$

L'idea è di passare ad una rappresentazione "più fine" di entrambe, cioè scrivere:

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{E_i}(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\alpha_i\chi_{E_i\cap F_j}(x)$$

$$\varphi(x)=\sum_{j=1}^{k}\beta_j\chi_{F_j}(x)=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\beta_j\chi_{E_i\cap F_j}(x)$$

$\Rightarrow$ SICCOME $\varphi(x)$ È SEMPRE LA STESSA FUNZIONE, TUTTE LE VOLTE CHE $E_i\cap F_j\neq\emptyset$ SI AVRÀ CHE $\alpha_i=\beta_j$.

Di conseguenza:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i m(E_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\sum_{j=1}^{k}m(E_i\cap F_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\alpha_i m(E_i\cap F_j)$$

$$\sum_{j=1}^{k}\beta_j m(F_j)=\sum_{j=1}^{k}\beta_j\sum_{i=1}^{n}m(E_i\cap F_j)=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\beta_j m(E_i\cap F_j)$$

SONO UGUALI PERCHÉ PRIMA ABBIAMO VERIFICATO CHE SE $E_i\cap F_j\neq\emptyset$ ALLORA $\alpha_i=\beta_j$

OSS. 4 Operando come nell'osservazione 3, si potrebbero dimostrare molte altre proprietà di $\int\varphi$, quando φ è semplice.
Ad esempio se φ_1 e φ_2 sono funzioni semplici allora:

1) $\varphi_1\le\varphi_2 \Rightarrow \int\varphi_1\le\int\varphi_2$

2) $\int \alpha \varphi_1 + \alpha \varphi_2 = \alpha \int \varphi_1 + \beta \int \varphi_2$

e tante altre ancora.

DEF. 3 Data $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nulla fuori da un compatto e limitata definiamo

$$\int^+ f = \inf \left\{ \int \varphi \,\middle|\, \varphi \text{ semplice e tale che } \forall x \in \mathbb{R}^n \ \varphi(x) \geq f(x) \right\}$$

$$\int^- f = \sup \left\{ \int \varphi \,\middle|\, \varphi \text{ semplice e tale che } \forall x \in \mathbb{R}^n \ \varphi(x) \leq f(x) \right\}$$

Se inoltre $\int^+ f = \int^- f$ diremo che f è sommabile e il valore comune ottenuto per $\int^+ f$ e $\int^- f$ si indica con $\int f$ e prende il nome di integrale di Lebesgue di f.

OSS 5 Anche quando $\int^+ f \neq \int^- f$, usando la proprietà (2) dell'osservazione 4 si dimostra facilmente che $\int^- f \leq \int^+ f$.

DEF 4 Data $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diremo che f è misurabile se $\forall A$ aperto di $\mathbb{R}$ si ha che $f^{-1}(A)$ è un insieme misurabile.

TEOREMA 1 Data $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ limitata e nulla fuori da un compatto, f è sommabile se e solo se è misurabile.

TEOREMA 2 Data $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, è equivalente affermare che:

a) f è misurabile.

b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > \lambda\}$ è misurabile

c) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq \lambda\}$ è misurabile

d) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < \lambda\}$ è misurabile

e) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq \lambda\}$ è misurabile

(DIMOSTRAZIONE DA FINIRE NELLA PROSSIMA LEZIONE)