Metodi Matematici - Lez. 7

Titolo nota

15 ottobre 2018 (14.00-15.45) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma *Tor Vergata*

TEOREMA 1 Data $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, è equivalente affermare che:

a) f è misurabile.

b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ l'insieme $\underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > \lambda\}}_{f^{-1}((\lambda,+\infty))}$ è misurabile

c) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ l'insieme $\underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq \lambda\}}_{f^{-1}([\lambda,+\infty))}$ è misurabile

d) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ l'insieme $\underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < \lambda\}}_{f^{-1}((-\infty,\lambda))}$ è misurabile

e) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ l'insieme $\underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq \lambda\}}_{f^{-1}((-\infty,\lambda])}$ è misurabile

DIMO $\boxed{(b) \Leftrightarrow (e)}$ Si noti che per ogni $A \subset \mathbb{R}$ gli insiemi $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(A^c)$ sono complementari. In particolare, se $A = (\lambda, +\infty)$ si ha $A^c = (-\infty, \lambda]$ e quindi $f^{-1}((\lambda,+\infty))$ e $f^{-1}((-\infty,\lambda])$ sono complementari quindi ciascuno di essi è misurabile se e solo se lo è l'altro. Questo fornisce l'equivalenza di (b) ed (e).

$\boxed{(c) \Leftrightarrow (d)}$ Si sfrutta il fatto che $(-\infty, \lambda)$ e $[\lambda, +\infty)$ sono complementari e si procede esattamente come nel punto precedente.

$\boxed{(c) \Rightarrow (b)}$ Osserviamo che:

$$(\lambda, +\infty) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[\lambda + \frac{1}{n}, +\infty\right)$$

$\boxed{\supset}$ è ovvia perché $[\lambda + \frac{1}{n}, +\infty) \subset (\lambda, +\infty)$ $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$

$\boxed{\subset}$ vale perché per ogni $x \in (\lambda, +\infty)$ si ha $x - \lambda > 0$ e quindi esiste $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ t.c. $x - \lambda \geq \frac{1}{n}$, cioè $\lambda + \frac{1}{n} \leq x$, cioè $x \in [\lambda + \frac{1}{n}, +\infty)$

Di conseguenza:

$$f^{-1}((\lambda, +\infty)) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[\lambda + \frac{1}{n}, +\infty\right)\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \overbrace{f^{-1}\left(\left[\lambda + \frac{1}{n}, +\infty\right)\right)}^{\text{SONO TUTTI MISURABILI GRAZIE A (c)}}$$

Quindi, qualsiasi sia $\lambda \in \mathbb{R}$, $f^{-1}((\lambda, +\infty))$ è misurabile perché unione numerabile di insiemi misurabili. Quindi vale (b).

$\boxed{(b) \Rightarrow (c)}$ Osserviamo che:

$$[\lambda, +\infty) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(\lambda - \frac{1}{n}, +\infty\right)$$

$\boxed{\subset}$ è ovvia perché $[\lambda, +\infty) \subset \left(\lambda - \frac{1}{n}, +\infty\right)$ per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

$\boxed{\supset}$ è vera perché se $x \in \left(\lambda - \frac{1}{n}, +\infty\right)$ per ogni n, allora $x > \lambda - \frac{1}{n}$ per ogni n, e quindi $x \geq \lambda$, cioè $x \in [\lambda, +\infty)$

Di conseguenza:

SONO TUTTI MISURABILI GRAZIE A (b)

$$f^{-1}([\lambda, +\infty)) = f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(\lambda - \frac{1}{n}, +\infty\right)\right) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} f^{-1}\left(\left(\lambda - \frac{1}{n}, +\infty\right)\right)$$

Quindi, qualsiasi sia $\lambda \in \mathbb{R}$, $f^{-1}([\lambda, +\infty))$ è misurabile perché intersezione numerabile di insiemi misurabili. Quindi vale (c).

$\boxed{(a) \Rightarrow (b)}$ Ovvio, perché tutti gli insiemi del tipo $(\lambda, +\infty)$ sono aperti

$\boxed{(b) \Rightarrow (a)}$ Questa è la parte più lunga. Osserviamo intanto che se vale (b), valgono anche (c), (d) ed (e). Grazie a questo, per ogni intervallo aperto (a, b) si ha:

$$f^{-1}((a,b)) = f^{-1}((-\infty, b) \cap (a, +\infty)) = \underbrace{f^{-1}((-\infty, b))}_{\text{MISURABILE GRAZIE A (d)}} \cap \underbrace{f^{-1}((a, +\infty))}_{\text{MISURABILE GRAZIE A (b)}}$$

Quindi $f^{-1}((a,b))$ è misurabile perché intersezione di 2 insiemi misurabili.

Osserviamo ora che se A è un generico aperto e $x \in A$ allora esiste sempre un intervallo (a,b) con $a, b \in \mathbb{Q}$ tale che $x \in (a,b)$ e $(a,b) \subset A$.

Per ogni x, indichiamo con I_x un intervallo siffatto. Avremo che:

$$A = \bigcup_{x \in A} I_x$$

È UNIONE AL PIÙ NUMERABILE PERCHÉ LA FAMIGLIA DI TUTTI GLI (a,b) CON $(a,b) \in \mathbb{Q}$ È NUMERABILE

OVVIO PERCHÉ OGNI I_x È CONTENUTO IN A MA OGNI $x \in A$ È CONTENUTO IN QUALCHE I_x

Quindi ogni aperto A di $\mathbb{R}$ può essere riscritto come:

$$A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$$

dove gli I_i sono intervalli aperti.

Ma allora:

SONO TUTTI MISURABILI PERCHÉ GLI I_i SONO INTERVALLI APERTI

$$f^{-1}(A) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i\right) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f^{-1}(I_i)$$

quindi $f^{-1}(A)$ è misurabile perché unione numerabile di insiemi misurabili. Ciò significa che vale (a).

OSS. 1 Si ricordi che si può estendere $\mathbb{R}$ con l'aggiunta di $+\infty$ e $-\infty$, ottenendo $\mathbb{R}^*$. Su $\mathbb{R}^*$ può essere definita una topologia che estende quella di $\mathbb{R}$ nel modo seguente: tutti gli $x \in \mathbb{R}^*$ diversi da $+\infty$ e $-\infty$ hanno come intorni gli stessi che avevano in $\mathbb{R}$, invece $+\infty$ e $-\infty$ hanno come intorni le semirette destre e sinistre, rispettivamente. Una volta stabilito chi sono gli intorni rimangono automaticamente definiti tutti gli altri concetti topologici: parte interna, frontiera, chiusura, insiemi aperti, ecc.

DEF. 1 Data $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$, diremo che f è misurabile se, per ogni A aperto di $\mathbb{R}^*$, si ha che $f^{-1}(A)$ è misurabile.

OSS. 2 Il teorema 1 continua a valere anche per le funzioni a valori in $\mathbb{R}^*$, ovviamente tenendo, quando serve, i valori $+\infty$ e $-\infty$. Ad esempio, l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > \lambda\}$ è $f^{-1}((\lambda, +\infty])$.

TEOREMA 2 Siano $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$ misurabili e sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^*$. Allora:

1) L'insieme $E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > g(x)\}$ è misurabile.
2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha f(x)$ e $\alpha + f(x)$ sono funzioni misurabili
3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha f(x) + \beta g(x)$ è una funzione misurabile.

4) Dette $F(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ e $G(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$, sia $F(x)$ che $G(x)$ sono misurabili

5) Se (f_n) è crescente, cioè $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, allora $H(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$ è misurabile. Idem se (f_n) è decrescente.

6) Dette $F(x) = \lim_{n \to +\infty} \sup_{k \geq n} f_k(x)$ e $G(x) = \lim_{n \to +\infty} \inf_{k \geq n} f_k(x)$, allora $F(x)$ e $G(x)$ sono funzioni misurabili.

7) Se $H(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$ allora $H(x)$ è misurabile.

$\boxed{\text{DIMO}}$ In via preliminare osserviamo che se vale (6) vale anche (7) visto che quando esiste $\lim_{n \to +\infty} f_n(x)$, questo coincide sia con $\lim_{n \to +\infty} \sup_{k \geq n} f_k(x)$ sia con $\lim_{n \to +\infty} \inf_{k \geq n} f_k(x)$. Infatti se $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = H(x)$ allora, fissato x, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. se $k \geq n$ allora:

$$H(x) - \varepsilon < f_k(x) < H(x) + \varepsilon$$

quindi vale anche:

$$H(x) - \varepsilon \leq \inf_{k \geq n} f_k(x) \leq \sup_{k \geq n} f_k(x) \leq H(x) + \varepsilon$$

che, passando al limite per $n \to +\infty$, diventa:

$$(*) \qquad H(x) - \varepsilon \leq G(x) \leq F(x) \leq H(x) + \varepsilon$$

Visto la $(*)$ vale per ogni $\varepsilon > 0$, segue che:

$$H(x) = G(x) = F(x).$$

Poiché (6) afferma che $G(x)$ e $F(x)$ sono misurabili, una volta dimostrato (6), vale automaticamente (7).

Dimostriamo ora che (1), (2), ..., (6) valgono.

$\boxed{\text{DIMO. DI (1)}}$ Osserviamo che in x si ha $f(x) > g(x)$ se e solo se $\exists z \in \mathbb{Q}$ t.c. $f(x) > z > g(x)$, cioè se e solo se $\exists z \in \mathbb{Q}$ t.c.

$$x \in f^{-1}((r,+\infty]) \cap g^{-1}([-\infty, r))$$

SONO MISURABILI PERCHÉ f e g SONO FUNZIONI MISURABILI

Quindi possiamo scrivere:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > g(x)\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \left(f^{-1}((r,+\infty]) \cap g^{-1}([-\infty, r)) \right)$$

RICORDARE CHE $\mathbb{Q}$ È NUMERABILE

Quindi $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > g(x)\}$ è unione numerabile di insiemi misurabili, quindi è misurabile.

$\boxed{\text{DIMO DI (2)}}$ Dette $h(x) = a + f(x)$ e $\varphi(x) = a f(x)$ vogliamo mostrare che esse sono funzioni misurabili.

Cominciamo da $h(x)$. Basta mostrare che $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ è misurabile l'insieme:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) > \lambda\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a + f(x) > \lambda\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > \lambda - a\}$$

che è un insieme misurabile, perché f è una funzione misurabile.

Vediamo $\varphi(x)$. Il caso $a = 0$ è ovvio perché $\varphi(x)$ è identicamente nulla, quindi trattiamo il caso $a \neq 0$. Bisogna mostrare che $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) > \lambda\}$ è misurabile. Si ha:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) > \lambda\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot f(x) > \lambda\} = \begin{cases} \overset{a>0}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > \frac{\lambda}{a}\} \\ \underset{a<0}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < \frac{\lambda}{a}\} \end{cases}$$

che in entrambi i casi risulta misurabile perché f è una funzione misurabile.

(... continua nella lezione successiva ....)