Metodi Matematici - Lez. 8

Titolo nota

16 ottobre 2018 (9.30-11.15) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma *Tor Vergata*

(... continuo la dimostrazione del TEO. 2 della LEZ. 7)

DIMO DI (3) Mostriamo prima che $f(x)+g(x)$ è una funzione misurabile cioè che, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, l'insieme $E=\{x\in\mathbb{R}^n \mid f(x)+g(x)>\lambda\}$ è un insieme misurabile. Si noti che si può scrivere:

$$E=\{x\in\mathbb{R}^n \mid f(x)>\lambda-g(x)\}$$

A questo punto se $g(x)$ è misurabile anche $-g(x)$ è misurabile (per il punto (2)) e quindi anche $\lambda-g(x)$ è misurabile (sempre per il punto (2)).
Ma allora E è l'insieme degli $x\in\mathbb{R}$ per i quali la funzione misurabile $f(x)$ supera la funzione misurabile $\lambda-g(x)$ che, per il punto (1), è un insieme misurabile. Il fatto che, qualsiasi sia $\lambda\in\mathbb{R}$, E risulta misurabile, significa che la funzione $f(x)+g(x)$ è misurabile.
Ora, per ogni $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ $\alpha f(x)$ e $\beta g(x)$ sono funzioni misurabili, per il punto (2), e per quanto appena visto la loro somma $\alpha f(x)+\beta g(x)$ è una funzione misurabile.

DIMO DI (4) Mostriamo prima che è misurabile $F(x)$. Per ogni fissato $\lambda\in\mathbb{R}$ definiamo:

$$E=\{x\in\mathbb{R}^n \mid F(x)>\lambda\}$$

ed

$$E_n=\{x\in\mathbb{R}^n \mid f_n(x)>\lambda\}.$$

Sappiamo che tutti gli E_n sono misurabili, perché tutte le f_n sono misurabili. Vogliamo mostrare che E è misurabile.
A tale scopo osserviamo che, essendo $F(x)=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$, si ha:

$$F(x)>\lambda \iff \exists n\in\mathbb{N} \text{ t.c. } f_n(x)>\lambda$$

cioè:

$$x\in E \iff \exists n\in\mathbb{N} \text{ t.c. } x\in E_n$$

da cui segue:

$$E = \bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n$$

Quindi E è misurabile perché unione numerabile di insiemi misurabili.

Il fatto che, qualunque sia $\lambda \in \mathbb{R}$, l'insieme $E = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) > \lambda \}$ sia misurabile significa che $F(x)$ è una funzione misurabile.

Per quanto riguarda $G(x)$ basta osservare che:

$$G(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) = - \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(- f_n(x) \right)$$

e applicare il risultato appena ottenuto per il sup.

$\boxed{\text{DIMO DI (5)}}$ Trattiamo prima il caso crescente. Si ha:

$$H(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$$

quindi basta applicare il punto (4).

Se invece siamo nel caso in cui (f_n) è una successione decrescente si ha:

$$H(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$$

da cui la tesi segue sempre applicando il punto (4).

$\boxed{\text{DIMO DI (6)}}$ Cominciamo con $F(x)$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo

(●) $$g_n(x) = \sup_{k \geq n} f_k(x)$$

cosicché otteniamo:

$$F(x) = \lim_{n \to +\infty} \sup_{k \geq n} f_k(x) = \lim_{n \to +\infty} g_n(x).$$

Osserviamo che ogni g_n è una funzione misurabilile, perché basta applicare il punto (4) a (●). Inoltre la successione $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ è decrescente.

Quindi $F(x)$ è limite di una successione decrescente di funzioni misurabili e quindi è misurabile grazie al punto (5).

Per quanto riguarda $G(x)$ ci si può ricondurre a quanto appena dimostrato osservando che:

$$G(x) = \lim_{n \to +\infty} \inf_{k \geq n} f_k(x) = - \lim_{n \to +\infty} \sup_{k \geq n} \left(- f_k(x) \right)$$

DEF.1 Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile e limitato ed $f: E \to \mathbb{R}$ limitata, diremo che f è sommabile su E se risulta sommabile su $\mathbb{R}^n$ la funzione $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Inoltre si pone $\int_E f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x)\,dx$.

DEF 2 Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile ed $f: E \to \mathbb{R}^*$ non negativa, diremo che f è sommabile su E se:

PALLA CON CENTRO NELL'ORIGINE 0 E RAGGIO r

1) $\forall r \in [0, +\infty)$ la funzione $\min\{r, f(x)\}$ è sommabile su $E \cap I_r(0)$

2) $\lim_{r \to +\infty} \int_{E \cap I_r(0)} \min\{r, f(x)\}\,dx = \mu < +\infty$

È CRESCENTE IN r QUINDI IL LIMITE μ ESISTE SEMPRE, MA POTREBBE ESSERE $+\infty$, IN TAL CASO SI DICE CHE $f(x)$ È INTEGRABILE SU E E SI PONE $\int_E f(x)\,dx = +\infty$

In tal caso poniamo per definizione $\int_E f(x)\,dx = \mu$.

DEF.3 Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile ed $f: E \to \mathbb{R}^*$, diremo che f è sommabile su E se sono sommabili su E le funzioni f^+ ed f^-. In tal caso si pone $\int_E f(x)\,dx = \int_E f^+(x)\,dx - \int_E f^-(x)\,dx$.

DEF.4 Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile ed $f: E \to \mathbb{R}^*$ tale che f^- sia sommabile su E ed f^+ invece sia solo integrabile (nel senso che soddisfa la DEF. 2 ma con $\mu = +\infty$). Allora diremo che f è integrabile su E e $\int_E f(x)\,dx = +\infty$.
Se invece f^+ è sommabile ed f^- è solo integrabile diremo ugualmente che f è integrabile su E ma porremo $\int_E f(x)\,dx = -\infty$.

DEF.5 Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ insieme misurabile e $P(x)$ un'affermazione di cui abbia senso chiedersi se sia vera o falsa per ciascun $x \in E$, diremo che $P(x)$

vale "quasi ovunque in E" se l'insieme $\{x \in E \mid P(x) \text{ è falsa}\}$ ha misura nulla.

SI ABBREVIA SCRIVENDO q.o.

$\boxed{\text{TEO 1}}$ Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ ed $f: E \to [0, +\infty]$ sommabile e tale che $\int_E f(x)\,dx = 0$, allora $f(x) = 0$ q.o. in E.

$\boxed{\text{DIMO}}$ Detto $F = \{x \in E \mid f(x) \neq 0\}$, vogliamo mostrare che $m(F) = 0$.

Intanto, visto che $f(x) \geq 0$ possiamo scrivere:

$$F = \{x \in E \mid f(x) > 0\}$$

Se ora, per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ poniamo:

$$F_n = \{x \in E \mid f(x) > \tfrac{1}{n}\}$$

si ottiene:

$$F = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$$

L'INCLUSIONE $\supset$ È OVVIA PERCHÉ $F_n \subset F$ PER OGNI n. ANCHE L'INCLUSIONE $\subset$ È VERA PERCHÉ SE $x \in F$ ALLORA $f(x) > 0$ QUINDI BASTA SCEGLIERE n IN MODO CHE $0 < \frac{1}{n} < f(x)$ PER AVERE CHE $x \in F_n$.

Si noti che per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ si ha $F_n \subset F_{n+1}$, perché se $f(x) > \frac{1}{n}$ allora a maggior ragione $f(x) > \frac{1}{n+1}$.

Di conseguenza

$$(*) \qquad m(F) = \lim_{n \to +\infty} m(F_n).$$

Per mostrare che $m(F) = 0$ basta quindi mostrare che $m(F_n) = 0$ per ogni n.

A tale scopo basta osservare che per ogni $x \in F_n$ si ha $f(x) > \frac{1}{n}$ e quindi in tutto E si ha:

$$f(x) \geq \frac{1}{n} \chi_{F_n}(x)$$

Di conseguenza:

$$\int_E \frac{1}{n} \chi_{F_n}(x)\,dx \leq \int_E f(x)\,dx = 0$$

Ma siccome:

$$\int_E \frac{1}{n} \chi_{F_n}(x)\,dx = \frac{1}{n} m(F_n)$$

otteniamo:

$$\frac{1}{n} m(F_n) \leq 0$$

da cui segue $m(F_n) = 0$, che combinata con la $(*)$, fornisce la tesi.

TEO 2 Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile ed $f: E \to \mathbb{R}^*$ sommabile, allora gli insiemi $F = \{x \in E \mid f(x) = +\infty\}$ e $G = \{x \in E \mid f(x) = -\infty\}$ hanno entrambi misura nulla.

DIMO Mostriamo solo che $m(F) = 0$ (la dimostrazione per G è analoga)

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, poniamo:

$$F_n = \{x \in E \mid f(x) > n\}$$

Ovviamente $F_{n+1} \subset F_n$ perché se $f(x) > n+1$ si ha anche, a maggior ragione, che $f(x) > n$. Inoltre si ha:

$$F = \bigcap_{n=0}^{+\infty} F_n$$

L'INCLUSIONE $\subset$ È OVVIA VISTO CHE $F \subset F_n$ PER OGNI n. ANCHE L'INCLUSIONE $\supset$ È VERA PERCHÉ SE $x \in F_n$ PER OGNI n, CIÒ SIGNIFICA CHE $f(x) > n$ PER OGNI n, E QUINDI $f(x) = +\infty$.

Infine, per dare una stima di $m(F_n)$, osserviamo che per $x \in F_n$ si ha $f(x) > n$ e quindi:

$$n \chi_{F_n}(x) \leq f^+(x)$$

per ogni $x \in E$.

Di conseguenza:

$$\int_E n \chi_{F_n}(x)\, dx \leq \int_E f^+(x)\, dx$$

Da cui segue:

$$m(F_n) \leq \frac{1}{n} \int_E f^+(x)\, dx$$

È FINITO PERCHÉ f È SOMMABILE

e quindi $m(F_n)$ è finita per ogni n e, in particolare $m(F_n) \to 0$.

A questo punto, poiché $F_{n+1} \subset F_n$ e $F = \bigcap_{n=0}^{+\infty} F_n$, possiamo concludere che:

$$m(F) = \lim_{n \to +\infty} m(F_n) = 0$$

che è la tesi.

Per mostrare che $m(G) = 0$ si opera allo stesso modo, ma usando f^- al posto di f^+.