Metodi Matematici - Lez. 9

Titolo nota

23 ottobre 2018 (9.30-11.15) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

TEO.1 (CONVERGENZA MONOTONA) Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile e sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni definite in E, sommabili e non negative, tale che:

1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ q.o.
2) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_E f_n(x)\,dx = \lambda < +\infty$

Allora detta $f: E \to \mathbb{R}$ la funzione definita q.o. da $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$, si ha che f è sommabile e $\int_E f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)\,dx$.

OSS 1 Ometteremo la dimostrazione del Teorema 1, ma vogliamo almeno far notare che la l'ipotesi (1) basta a garantire che:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \text{ esiste q.o.}$$

Infatti, se per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo $E_n = \{x \in E \mid f_{n+1}(x) < f_n(x)\}$, la (1) significa proprio che $m(E_n) = 0$.

Osserviamo inoltre che

$$\left((f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ è crescente} \right) \iff \left(f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \text{ per ogni } n \in \mathbb{N} \right) \iff$$

$$\iff \left(\forall n \in \mathbb{N} \quad x \notin E_n \right) \iff x \notin \bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n$$

Ma poiché $m(E_n) = 0$ per ogni n, anche $m\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n\right) = 0$ e quindi $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ risulta essere crescente q.o.

Quindi anche $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ esiste q.o.

TEO.2 (CONVERGENZA DOMINATA) Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile e sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni sommabili in E t.c.

1) $\exists f: E \to \mathbb{R}^*$ t.c. $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ q.o.

2) $\exists g$ sommabile su E t.c. $|f(x)| \leq g(x)$ q.o.

e $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.o.

Allora f è sommabile su E e $\lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0$. **(*)**

OSS. 2 La condizione **(*)** implica anche che:

(+)
$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)\, dx = \int_E f(x)\, dx$$

cioè che si può passare al limite sotto il segno di integrale.

Infatti:

(**)
$$0 \leq \left| \int_E f_n(x)\, dx - \int_E f(x)\, dx \right| \leq \int_E |f_n(x) - f(x)|\, dx$$

e quindi se vale **(*)**, cioè se va a zero l'ultimo membro di **(**)** segue che va a zero anche $\left|\int_E f_n(x)\,dx - \int_E f(x)\,dx\right|$ e ciò significa che vale **(+)**.

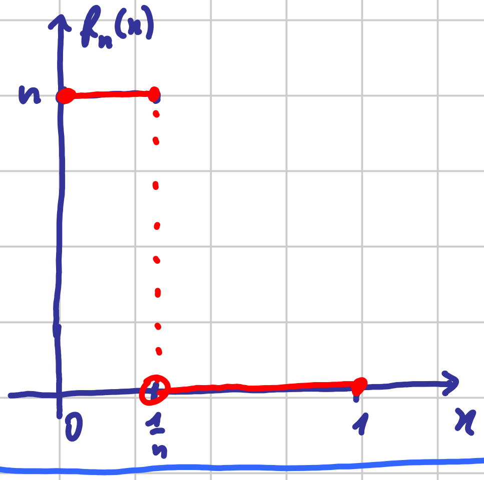
OSS. 3 L'ipotesi (2) del Teorema 2 non è eliminabile: in generale l'ipotesi (1) non basta da sola a garantire che $\int_E f_n \to \int_E f$.

Ad esempio, se prendiamo $E = [0,1]$ e $f_n = n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$ e $f(x) \equiv 0$, si ha:

1) $f_n(x) \to f$ per ogni $x \in (0,1]$

2) $\int_0^1 f_n(x)\, dx = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$

quindi $\int_0^1 f_n(x)\, dx \to 1 \neq 0 = \int_0^1 f(x)\, dx$.



Quindi $f_n(x) \to f(x)$ q.o. ma $\int_0^1 f_n(x)\, dx \not\to \int_0^1 f(x)\, dx$.

TEO 3 Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile e sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni sommabili su E che sia di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_1$, cioè t.c.

(#) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n, m \geq n_0$ si ha $\int_E |f_n(x) - f_m(x)|\, dx < \varepsilon$.

Allora $\exists f$ sommabile su E t.c. $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$, cioè t.c. $\int_E |f_n(x) - f(x)|\, dx \to 0$, per $n \to +\infty$.

DIMO | I Passo | Mostro che la successione (f_n) ha una sottosuccessione (f_{n_k}) t.c.

$$(\bullet) \qquad \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^1} < \frac{1}{2^k}.$$

Infatti, usando (#), prendo $n_1 \in \mathbb{N}$ t.c. $n, m \geq n_1 \Rightarrow \|f_n - f_m\|_1 < \frac{1}{2}$.
Dopodiché, sempre usando (#), prendo $n_2 > n_1$ t.c. $n, m \geq n_2 \Rightarrow \|f_n - f_m\|_1 < \frac{1}{2^2}$.
E così via, al passo k-esimo prendo $n_k > n_{k-1}$ t.c. $n, m \geq n_k \Rightarrow \|f_n - f_m\|_1 < \frac{1}{2^k}$.
In tal modo, $\forall k$ intero positivo, $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1 < \frac{1}{2^k}$.
La sottosuccessione cercata è quindi (f_{n_k}) dove n_k è la successione di indici appena costruita.
Si noti che, essendo (f_n) di Cauchy, per mostrare che essa è convergente basta mostrare che lo è una sua sottosuccessione.
Se infatti immaginiamo che esista f sommabile su E tale che $\|f_{n_k} - f\|_1 \to 0$, allora anche $\|f_n - f\|_1 \to 0$.
Infatti, $\forall \varepsilon > 0$ prendiamo $\bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c.

$$(\square) \qquad n, m > \bar{n} \Rightarrow \|f_n - f_m\|_1 < \frac{\varepsilon}{2},$$

cosa che possiamo fare grazie a (#).
Prendiamo inoltre $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ t.c.

$$(\boxdot) \qquad n_k > \tilde{n} \Rightarrow \|f_{n_k} - f\|_1 < \frac{\varepsilon}{2},$$

cosa che possiamo fare perché $f_{n_k} \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$.
A questo punto, se $n \geq \bar{n}$ basta prendere $n_k > \max\{\bar{n}, \tilde{n}\}$ per avere

$$\|f_n - f\|_1 \leq \underbrace{\|f_n - f_{n_k}\|_1}_{< \frac{\varepsilon}{2} \text{ grazie a } (\square)} + \underbrace{\|f_{n_k} - f\|_1}_{< \frac{\varepsilon}{2} \text{ grazie a } (\boxdot)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Questo dimostra che $\forall \varepsilon > 0$ definitivamente in n si ha $\|f_n - f\|_1 < \varepsilon$, cioè che $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$.

II° Passo | Per quanto detto al I° passo ci basta mostrare che la (f_{n_k}) che soddisfa $(\bullet)$ è convergente. D'ora in poi, per comodità scriveremo

f_k invece che f_{n_k}, quindi la nostra sottosuccessione è (f_k) e, per ogni k intero positivo, soddisfa:

$$\int_E |f_{k+1}(x) - f_k(x)|\, dx < \frac{1}{2^k}$$

Poiché, alla fine, applicheremo il Teorema della convergenza dominata, dobbiamo costruirci 2 cose: una $f(x)$ tale che $f_n(x) \to f(x)$ q.o. e una $h(x)$ sommabile tale che $|f(x)| \leq h(x)$ q.o. e $|f_k(x)| \leq h(x)$ q.o. per ogni k.

A tale scopo, per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ poniamo $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|$ e osserviamo che valgono le proprietà:

1) $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ $\quad g_n(x) \geq 0$ $\quad$ per ogni $x \in E$
2) $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ $\quad g_{n+1}(x) \geq g_n(x)$ $\quad$ per ogni $x \in E$.
3) $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ $\quad \int_E g_n(x)\, dx < 1$.

La (1) è ovvia. La (2) vale perché $g_{n+1}(x) = g_n(x) + |f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| \geq g_n(x)$.
Infine la (3) vale perché:

$$\int_E g_n(x)\, dx = \int_E \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int_E |f_{k+1}(x) - f_k(x)|\, dx \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} < 1.$$

Poiché valgono (1), (2) e (3) posso applicare il Teorema della convergenza monotona e dire che la funzione a cui $g_n(x)$ converge puntualmente, cioè $g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|$ è sommabile e soddisfa $\int_E g(x)\, dx \leq 1$.
In particolare da ciò segue che $g(x) < +\infty$ q.o., cioè che:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \quad \text{converge q.o.}$$

Da questo segue che $(f_k(x))$ è di Cauchy q.o. perché

$$|f_k(x) - f_h(x)| \overset{k \leq h}{\leq} |f_k(x) - f_{k+1}(x)| + |f_{k+1}(x) - f_{k+2}(x)| + \dots + |f_{h-1}(x) - f_h(x)| =$$

$$= g_{h-1}(x) - g_{k-1}(x) \to 0 \quad \text{q.o.}$$

GRAZIE AL FATTO CHE IL LIMITE $g(x)$ È FINITO q.o.

e questo significa che per quasi ogni x si ha:

$\forall \varepsilon > 0$ definitivamente in k, h si ha $|f_k(x) - f_h(x)| < \varepsilon$

la qual cosa significa che $(f_k(x))$ è di Cauchy q.o.

Come conseguenza, visto che $\mathbb{R}$ è completo, abbiamo che

$$\lim_{k \to +\infty} f_k(x) \text{ esiste finito q.o.}$$

Possiamo quindi definire $f(x)$ come $\lim_{k \to +\infty} f_k(x)$ per tutti gli x per i quali tale limite esiste, mentre per gli x rimanenti che costituiscono un insieme di misura nulla, $f(x)$ può essere definita come ci pare, ad esempio 0.

Ora che ci siamo costruiti $f(x)$ tale che $f_k(x) \to f(x)$ q.o. ci serve $h(x)$ per dominare sia $f(x)$ che $f_k(x)$.

Mostriamo che possiamo prendere $h(x) = |f_1(x)| + g(x)$.

Ovviamente tale $h(x)$ è sommabile perché f_1 e g lo sono.

Inoltre, per ogni $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ si ha:

$$|f_k(x)| \leq |f_1(x)| + |f_k(x) - f_1(x)| \leq$$

$$\leq |f_1(x)| + |f_k(x) - f_{k-1}(x)| + |f_{k-1}(x) - f_{k-2}(x)| + \dots + |f_2(x) - f_1(x)| =$$

$$= |f_1(x)| + g_{k-1}(x) \leq |f_1(x)| + g(x) = h(x)$$

Quindi per ogni $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ si ha

$$(\Delta) \qquad |f_k(x)| \leq h(x)$$

e ricordando che $f_k(x) \to f(x)$ q.o., passando al limite in (Δ) si ottiene:

$$|f(x)| \leq h(x) \text{ q.o.}$$

Di conseguenza (f_k) e f soddisfano tutte le ipotesi per poter applicare il teorema della convergenza dominata e quindi, applicandolo, otteniamo che $\|f_k - f\|_1 \to 0$ per $k \to +\infty$.