Metodi Matematici - Lez. 10

Titolo nota

5 novembre 2018 (14.00-15.45) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma *Tor Vergata*

(.... CONCLUSIONE LEZIONE SCORSA)

DEF. 0 Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile, definiamo:

$$L^1(E) = \{ f: E \to \mathbb{R} \mid f \text{ è sommabile} \} / \sim$$

dove "$\sim$" è una relazione di equivalenza definita da:

$f \sim g \iff f(x) = g(x)$ q.o.

OSS. 0 Grazie al fatto che si è quozientato rispetto a $\sim$, cioè che si sono identificate tra loro le funzioni uguali q.o., la $\|\cdot\|_1$ non è più solo una seminorma, ma diventa una norma. Inoltre, grazie all'ultimo teorema della lezione scorsa $L^1(E)$ risulta anche essere completo con $\|\cdot\|_1$. Quindi $L^1(E)$ con $\|\cdot\|_1$ è di Banach.

SPAZI CON PRODOTTO SCALARE E DI HILBERT

DEF. 1 Dato V sp. vettoriale su $\mathbb{R}$ e $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, diremo che $\langle , \rangle$ è un prodotto scalare se soddisfa le proprietà:

1) $\forall u_1, u_2, v \in V \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \langle \alpha u_1 + \beta u_2, v \rangle = \alpha \langle u_1, v \rangle + \beta \langle u_2, v \rangle$
2) $\forall u, v \in V \ \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
3) $\forall v \in V \ \langle v, v \rangle \geq 0$ con "=" che vale se e solo se $v = \bar{0}$.

DEF. 2 Dato V sp. vettoriale su $\mathbb{R}$ e $\langle , \rangle$ prodotto scalare su V, per ogni $v \in V$ definiamo $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

TEO 1 La $\|\cdot\|$ definita in $\boxed{\text{DEF. 2}}$ ha le seguenti proprietà:

1) $\forall v \in V \quad \|v\| \geq 0$ e vale "=" se e solo se $v = \bar{0}$.

2) $\forall v \in V$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ si ha $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$

3) $\forall v, w \in V$ si ha $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ (Cauchy-Schwartz)

4) $\forall v, w \in V$ si ha $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

In particolare $\|\cdot\|$ è una norma che prende il nome di norma indotta dal prodotto scalare.

$\boxed{\text{DIMO}}$ La (1) segue subito dalle proprietà (3) di $\boxed{\text{DEF 1}}$.

Anche la (2) si dimostra facilmente:

$$\|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle v, v \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle v, v \rangle} = |\lambda| \cdot \|v\|.$$

Mostriamo ora la (3). Grazie alla proprietà (3) di $\boxed{\text{DEF 1}}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\forall v, w \in V$ si ha:

$$(\bullet) \qquad \langle v + \lambda w, v + \lambda w \rangle \geq 0$$

cioè:

$$\langle v, v \rangle + \langle \lambda w, v \rangle + \langle v, \lambda w \rangle + \langle \lambda w, \lambda w \rangle \geq 0$$

cioè:

$$\|w\|^2 \cdot \lambda^2 + 2 \langle v, w \rangle \lambda + \|v\|^2 \geq 0$$

Ma allora il polinomio di 2° grado in λ che sta al primo membro deve avere $\Delta \leq 0$, cioè:

$$(2 \langle v, w \rangle)^2 - 4 \|w\|^2 \cdot \|v\|^2 \leq 0$$

cioè

$$(\times) \qquad |\langle v, w \rangle| \leq \|w\| \cdot \|v\|.$$

Si noti che se u e w sono linearmente indipendenti $v + \lambda w$ non può mai annullarsi per cui in $(\bullet)$ c'è una disuguaglianza stretta e, di conseguenza, anche in $(\times)$.

Mostriamo ora che vale (4). Si ha:

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle =$$

$$= \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \leq$$

PER LA DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY - SCHWARTZ

$$\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\cdot\|v\| + \|v\|^2 = \left(\|u\| + \|v\|\right)^2$$

da cui segue

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

ES. 1 Preso $V = C([a,b])$, per ogni $f, g \in V$ definiamo $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$. Allora $\langle\,,\rangle$ è un prodotto scalare.

Per dimostrarlo bisogna far vedere che $\langle\,,\rangle$ ha le proprietà richieste dalla **DEF 1**.

La (1) è ovvia perché $\forall f_1, f_2, g \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\langle \alpha f_1 + \beta f_2, g\rangle = \int_a^b \left(\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)\right) g(x)\,dx =$$

$$= \alpha \int_a^b f_1(x)g(x)\,dx + \beta \int_a^b f_2(x)g(x)\,dx = \alpha\langle f_1, g\rangle + \beta\langle f_2, g\rangle$$

Anche la (2) è ovvia perché $\forall f, g \in V$ si ha:

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b g(x)f(x)\,dx = \langle g, f\rangle$$

Infine, per mostrare la (3) si osservi che $\forall f \in V$ si ha:

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b (f(x))^2\,dx \geq 0$$

Il fatto che l'uguaglianza valga solo se $f(x)$ è identicamente nulla dipende dal fatto che f^2 è continua e si dimostra in modo del tutto analogo a quanto fatto nell' **ESEMPIO 3** della **LEZIONE 1**.

TEO 2 (IDENTITÀ DEL PARALLELOGRAMMA) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, $\langle\,,\rangle$ un prodotto scalare su V e $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\,,\rangle$. Allora per ogni $v, w \in V$ si ha $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\left(\|v\|^2 + \|w\|^2\right)$

DIMO $\forall v, w \in V$ si ha:

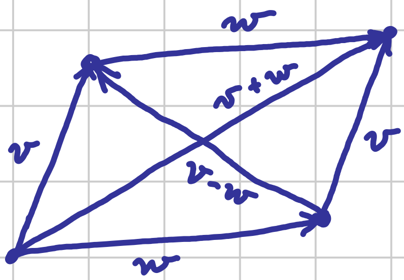
$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle + \langle v-w, v-w\rangle =$$

$$= \langle v,v\rangle + 2\cancel{\langle v,w\rangle} + \langle w,w\rangle + \langle v,v\rangle - 2\cancel{\langle v,w\rangle} + \langle w,w\rangle =$$

$$= 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$$

OSS.1 Il nome "IDENTITÀ DEL PARALLELOGRAMMA" deriva dalla seguente interpretazione geometrica:

IN UN PARALLELOGRAMMA LA SOMMA DEI QUADRATI DEI 4 LATI È UGUALE ALLA SOMMA DEI QUADRATI DELLE 2 DIAGONALI.



OSS.2 Un'importante conseguenza dell'identità del parallelogramma è che le palle sono STRETTAMENTE convesse. Infatti:

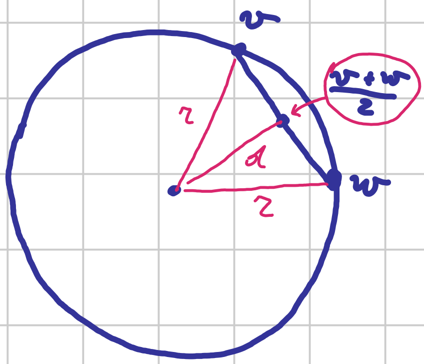
$$\|v+w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 - \|v-w\|^2$$

quindi, dividendo tutto per 4 si ottiene:

VALE DISUG. STRETTA PERCHÉ $v \neq w$

$$\left\|\frac{v+w}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\|v\|^2 + \frac{1}{2}\|w\|^2 - \left\|\frac{v-w}{2}\right\|^2 <$$

$$< \frac{1}{2}\|v\|^2 + \frac{1}{2}\|w\|^2 = \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}r^2 = r^2$$



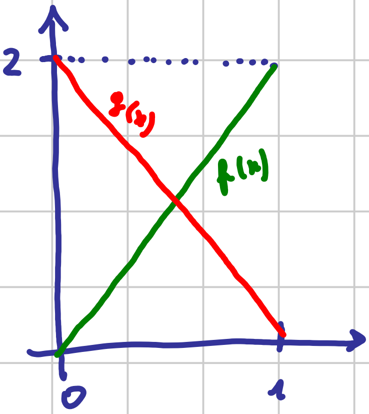
Da cui (vedi figura) segue: $d = \left\|\frac{v+w}{2}\right\|^2 < r$.

ES.2 Sia $V = C([0,1])$ con la norma $\|\cdot\|_1$. La norma $\|\cdot\|_1$ non è indotta da alcun prodotto scalare. Infatti è possibile trovare $f, g \in V$ tali che $\|f\|_1 = \|g\|_1 = 1$ e che inoltre anche $\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_1 = 1$. Ad esempio prendo $f(x) = 2x$ e $g(x) = 2 - 2x$ (vedi figura).

Si ha:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |2x| \, dx = \int_0^1 2x \, dx = 1$$

$$\|g\|_1 = \int_0^1 |2-2x| \, dx = \int_0^1 2-2x \, dx = 1$$



Tuttavia

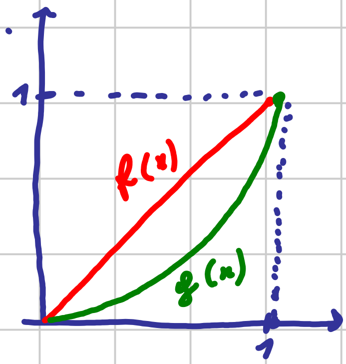
$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_1 = \int_0^1 \left| \frac{2x+(2-2x)}{2} \right| dx = \int_0^1 1 \, dx = 1$$

Quindi non $\|\cdot\|_1$ non può essere indotta da alcun prodotto scalare, altrimenti dovrebbe essere:

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_1 < 1 .$$

ES. 3 Sia $V = C([0,1])$ con $\|\cdot\|_\infty$. Allora $\|\cdot\|_\infty$ non può essere indotta da alcun prodotto scalare. Per mostrarlo basta esibire 2 funzioni $f, g \in C([0,1])$ t.c. $\|f\|_\infty = 1 = \|g\|_\infty$ ed anche $\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_\infty = 1$.

Ad esempio prendiamo $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$ (vedi figura).



Si ha

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |x| = 1$$

$$\|g\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |x^2| = 1$$

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{x+x^2}{2} \right| = 1$$

Quindi la palla unitaria non è strettamente convessa e perciò $\|\cdot\|_\infty$ non può essere indotta da un prodotto scalare.

DEF 3 Dato V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, $\langle , \rangle$ prodotto scalare su V e $K \subset V$.

Allora definiamo:

$$K^\perp = \{ v \in V \mid \forall w \in K \ \langle v, w \rangle = 0 \}$$

TEO.3 Il $K^\perp$ definito nella **DEF 3** è un sottospazio chiuso di V.

DIMO Per prima cosa mostriamo che $K^\perp$ è un sottospazio, cioè che è stabile per passaggio a combinazioni lineari.

Infatti: $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ $\forall v_1, v_2 \in K^\perp$ $\forall w \in K$ si ha

$$\langle \alpha v_1 + \beta v_2, w\rangle = \alpha\langle v_1, w\rangle + \beta\langle v_2, w\rangle = \alpha\cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

Ciò significa che se $v_1, v_2 \in K^\perp$ allora anche $\alpha v_1 + \beta v_2 \in K^\perp$.

Mostriamo ora che $K^\perp$ è chiuso, cioè che se $v_n \in K^\perp$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $v_n \to v$ rispetto alla norma indotta da $\langle , \rangle$, allora anche $v \in K^\perp$.

Si tratta di mostrare che $\forall w \in K$ si ha $\langle v, w\rangle = 0$. Si ha:

$$\langle v, w\rangle = \langle v - v_n + v_n, w\rangle = \langle v - v_n, w\rangle + \underbrace{\boxed{\langle v_n, w\rangle}}_{=0} = \langle v - v_n, w\rangle$$

PERCHÉ $v_n \in K^\perp$

Ma allora:

PERCHÉ $v_n \xrightarrow{\|\cdot\|} v$

$$0 \leq |\langle v, w\rangle| = |\langle v - v_n, w\rangle| \leq \|v - v_n\|\cdot\|w\| \longrightarrow 0$$

Di conseguenza $|\langle v, w\rangle| = 0$, cioè $\langle v, w\rangle = 0$.

ES.4 Siano $V = C([-1,1])$, $\langle , \rangle$ il solito prodotto scalare tra funzioni e $K = \{f \in V \mid f \text{ è pari}\}$. Mostrare che $K^\perp = \{g \in V \mid g \text{ è dispari}\}$.

DIMO Se g è dispari allora $g \in K^\perp$ perché per ogni f pari si ha:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx = 0$$

PERCHÉ SE $f(x)$ è pari e $g(x)$ è dispari allora $f(x)\cdot g(x)$ è dispari

Viceversa, se $g \in K^\perp$ mostriamo che g deve essere dispari.

A tale scopo scriviamo

$$g(x) = \underbrace{\frac{g(x)+g(-x)}{2}}_{= g_P(x)} + \underbrace{\frac{g(x)-g(-x)}{2}}_{= g_D(x)}$$

OSSERVIAMO CHE
$g_P(x)$ è PARI
E $g_D(x)$ è DISPARI

Poiché $g \in K^\perp$ e g_P è pari abbiamo che $\langle g, g_P \rangle = 0$.
Di conseguenza:

$$\langle g_P + g_D, g_P \rangle = 0$$

cioè:

Perché g_D è dispari e g_P è pari

$$\langle g_P, g_P \rangle + \underbrace{\langle g_D, g_P \rangle}_{=0} = 0$$

cioè

$$\langle g_P, g_P \rangle = 0$$

da cui segue che g_P deve essere identicamente nulla, cioè

$$\frac{g(x) + g(-x)}{2} = 0 \quad \text{per ogni } x.$$

Ciò significa che per ogni x si ha $g(x) = -g(x)$, cioè che $g(x)$ è dispari.
Quindi abbiamo dimostrato anche che se $g \in K^\perp$ allora g è dispari.