Metodi Matematici - Lez. 11-12

Titolo nota

6 novembre 2018 (9.30-11.15, 11:30-13:15) - docente: Prof. **E. Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

DEF. 1 Dato $(V, \langle , \rangle)$ e dato $K = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ con $v_i \neq 0 \ \forall i$, diremo che K è un insieme ortogonale se $\forall i, j = 1, \dots, n$ con $i \neq j$ si ha $\langle v_i, v_j \rangle = 0$.
Se inoltre $\|v_i\| = 1 \ \forall i = 1, \dots, n$, diremo che K è ortonormale.

ES. 1 Sia $V = C([-\pi, \pi])$ e $\langle , \rangle$ definito da $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx$.

Prendiamo $K = \{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx\}$.

Allora K è un insieme ortogonale.

Per verificarlo bisogna mostrare che:

① $\langle 1, \sin kx \rangle = 0$ ② $\langle 1, \cos kx \rangle = 0$ ③ $\langle \sin kx, \cos mx \rangle = 0$

④ $\langle \sin kx, \sin mx \rangle = 0$ se $m \neq k$ ⑤ $\langle \cos kx, \cos mx \rangle = 0$ se $m \neq k$

① e ② sono ovvi perché si sta integrando su un multiplo del periodo una funzione a media nulla.

Anche ③ è ovvio perché:

Perché $\sin(kx)\cos(mx)$ è dispari essendo prodotto di una funzione pari e una dispari

$$\langle \sin kx, \cos mx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cdot \cos(mx)\, dx = 0$$

Per mostrare ④ basta osservare che:

SI USA LA FORMULA:
$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$

$$\langle \sin kx, \sin mx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(mx)\, dx =$$

PERCHÉ È INTEGRALE SU UN MULTIPLO DEL PERIODO DI FUNZIONI A MEDIA NULLA

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(\cos(\underbrace{(k-m)}_{\neq 0 \text{ PERCHÉ } k \neq m}x) - \cos((k-m)x)\right) dx = 0$$

Per mostrare ⑤ si procede come per ④, ma usando la formula:

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$$

TEO 1 (PITAGORA) Dato $(V, \langle , \rangle)$ e dato $K = \{v_1, .., v_n\} \subset V$ ortogonale, si ha: $\| v_1 + v_2 + \dots + v_n \|^2 = \| v_1 \|^2 + \| v_2 \|^2 + \dots + \| v_n \|^2$.

DIMO Si dimostra per induzione.

Per $n = 2$ è ovvio perché:

$$\| v_1 + v_2 \|^2 = \langle v_1 + v_2 , v_1 + v_2 \rangle = \langle v_1, v_1 \rangle + 2 \underbrace{\langle v_1, v_2 \rangle}_{=0 \text{ PERCHÉ } K \text{ è ortogonale}} + \langle v_2, v_2 \rangle = \| v_1 \|^2 + \| v_2 \|^2$$

Se vale per $n = p$ vale anche per $n = p+1$ perché:

$$\| v_1 + \dots + v_p + v_{p+1} \|^2 = \langle (v_1 + \dots + v_p) + v_{p+1} , (v_1 + \dots + v_p) + v_{p+1} \rangle =$$

$$= \langle v_1 + \dots + v_p , v_1 + \dots + v_p \rangle + \underbrace{\langle v_1, \dots, v_p , v_{p+1} \rangle}_{=0 \text{ PERCHÉ INSIEME È ORTOGONALE}} + \langle v_{p+1}, v_{p+1} \rangle =$$

$$= \| v_1 + \dots + v_p \|^2 + \| v_{p+1} \|^2 =$$

PER L'IPOTESI INDUTTIVA

$$= \| v_1 \|^2 + \dots + \| v_p \|^2 + \| v_{p+1} \|^2$$

Quindi posso concludere che la tesi vale per ogni n.

DEF. 2 Dato (M, d) spazio metrico e dati $x \in M$ e $K \subset M$ definiamo:

$$d(x, K) = \inf_{y \in K} d(x, y)$$

TEO 2 (DELLA PROIEZIONE) Dati $(V, \langle , \rangle)$, $v \in V$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ insieme ortonormale di elementi di V. Poniamo $W = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$. Allora $\exists!\, w \in W$ tale che $d(v, w) = d(v, W)$ e tale w soddisfa:

1) $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ dove $\alpha_i = \langle v, e_i \rangle$

2) $v - w \in W^\perp$

3) $\| w \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \leq \| v \|^2$ (disug. di Bessel)

DIMO Come passo preliminare mostriamo che il vettore w definito da (1) deve necessariamente soddisfare anche (2). A tale scopo basta verificare che $\langle e_j, v-w\rangle = 0 \quad \forall j=1,\dots,n$, cosa che è vera perché:

$$\langle e_j, v-w\rangle = \langle e_j, v - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\rangle =$$

$$= \langle e_j, v\rangle - \sum_{i=1}^n \alpha_i \overbrace{\langle e_j, e_i\rangle}^{=\begin{cases} 0 & \text{se } i\neq j \\ 1 & \text{se } i=j\end{cases}} =$$

$$= \alpha_j - \alpha_j = 0$$

Ciò significa che il vettore definito da (1) soddisfa anche (2).
Mostriamo ora che se w verifica (2) allora è strettamente più vicino a v di tutti gli altri $u\in W$. Infatti $\forall u \in W$ con $u\neq w$ si ha:

$$\|v-u\|^2 = \|\overbrace{(v-w)}^{\in W^\perp} + \overbrace{(w-u)}^{\in W}\|^2 \overset{\text{PER T. DI PITAGORA}}{=} \|v-w\|^2 + \|w-u\|^2 > \|v-w\|^2$$

Si noti che il fatto che gli altri $u\in W$ siano STRETTAMENTE più distanti di w da v ci dice anche che w è l'UNICO che minimizza la distanza.
Rimane solo da dimostrare (3), che però è ovvio perché:

$$\|v\|^2 = \|(v-w)+w\|^2 \overset{\text{PER PITAGORA}}{=} \|v-w\|^2 + \|w\|^2 \geq \|w\|^2$$

$$= \Big\|\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\Big\|^2 = \sum_{i=1}^n \|\alpha_i e_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$$

$\boxed{\text{ES. 2}}$ Preso $V = C([-1,1])$ col solito prodotto scalare $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$.
Trovare la proiezione di $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ su $W = \operatorname{span}\{1, x, x^2, x^3\}$.
Per prima cosa osserviamo che $\{1, x, x^2, x^3\}$ NON è un insieme ortogonale. Per applicare il teorema della proiezione dovremmo innanzitutto trovare una base ortonormale per W applicando il procedimento di Gram-Schmidt. Visto che i calcoli sono lunghi cerchiamo scorciatoie.
Più precisamente mostriamo che, essendo $f(x)$ pari, basterà proiettarla su $\operatorname{span}\{1, x^2\}$. Per comodità poniamo $H = \operatorname{span}\{1, x^2\}$ e $K = \operatorname{span}\{x, x^3\}$.

Si noti che ogni elemento di H è perpendicolare a ogni elemento di K e quindi se trovo una base ortonormale $\{e_1, e_2\}$ di H e una base ortonormale $\{e_3, e_4\}$ di K, mettendole insieme otterrò che $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ è una base ortonormale di W. Si ricordi che e_1 ed e_2 sono funzioni pari ed e_3 ed e_4 sono funzioni dispari, quindi quando proietto f su e_3 ed e_4 ottengo zero. Ciò significa che la proiezione di f su W coincide con la sua proiezione su H, che è molto più corta da trovare. Troviamola.

Per prima cosa applico Gram-Schmidt a $\{1, x^2\}$ per trovare una base ortonormale:

$$e_1(x) = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{\langle 1,1\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle x^2, e_1(x)\rangle = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$e_2(x) = \frac{x^2 - \langle x^2, e_1(x)\rangle e_1(x)}{\| x^2 - \langle x^2, e_1(x)\rangle e_1(x)\|} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\| x^2 - \frac{1}{3}\|} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left\| x^2 - \frac{1}{3}\right\| = \sqrt{\int_{-1}^{1}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2 dx} = \dots = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}$$

Fatto ciò applico il T. della proiezione:

$$w(x) = \langle f(x), e_1(x)\rangle e_1(x) + \langle f(x), e_2(x)\rangle e_2(x) =$$

$$= \left(\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\, dx\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{x^2-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}}\, dx\right)\frac{x^2-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \left(\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)dx\right)\cdot\frac{45}{8}\left(x^2-\frac{1}{3}\right) = \dots$$ finire i calcoli.

DEF. 3 Dato $(V, \langle,\rangle)$ diremo che è uno spazio di Hilbert se è completo rispetto alla norma indotta da $\langle,\rangle$.

TEO. 3 (DELLA PROIEZIONE IN SP. DI HILBERT) Sia $(H, \langle,\rangle)$ uno sp. di Hilbert, sia $W \subset H$ un sottospazio chiuso e sia $v \in H$. Allora $\exists!\, w \in H$

tale che $d(v, W) = d(v, w)$ e tale w ha la proprietà che $v - w \in W^\perp$.

$\boxed{\text{DIMO}}$ Se fosse $v \in W$ il teorema è ovvio, quindi dimostriamolo supponendo $v \notin W$. In tal caso, essendo W chiuso, si avrà $d(v, W) = r > 0$.

Per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ definiamo:

PALLA CENTRATA IN v DI RAGGIO $r + \frac{1}{n}$

$$K_n = \{u \in W \mid \|u - v\| < r + \tfrac{1}{n}\} = W \cap B_v\left(r + \tfrac{1}{n}\right)$$

Notiamo che tutti i K_n sono non vuoti $\left(\text{perché } d(v, W) = r < r + \frac{1}{n}\right)$ e che per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ si ha $K_n \supset K_{n+1}$.

Se ora, per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ prendiamo $v_n \in K_n$ otteniamo una successione $(v_n)_{n \in \mathbb{N} - \{0\}}$ che sta definitivamente dentro a ciascuno dei K_n.

Osserviamo che se $u_1, u_2 \in K_n$ la loro distanza massima si può stimare nel modo seguente:

$$\|u_1 - u_2\|^2 = 2\|u_1\|^2 + 2\|u_2\|^2 - \|u_1 + u_2\|^2 =$$

$$= 2\|u_1\|^2 + 2\|u_2\|^2 - 4\left\|\frac{u_1 + u_2}{2}\right\|^2 =$$

$$\leq 2\left(r + \tfrac{1}{n}\right)^2 + 2\left(r + \tfrac{1}{n}\right)^2 - 4r^2 = 8r \cdot \tfrac{1}{n} - \tfrac{4}{n^2}$$

SE u_1 e u_2 STANNO IN K_n ANCHE $\frac{u_1 + u_2}{2}$ STA ANCORA IN K_n, PERCHÉ K_n È CONVESSO IN QUANTO INTERSEZIONE DI 2 INSIEMI CONVESSI

Questa stima permette di dimostrare che (v_n) è di Cauchy perché $\forall \varepsilon > 0$ basta prendere $n_0 \in \mathbb{N} - \{0\}$ tale che

$$8r \cdot \frac{1}{n_0} - \frac{4}{n_0^2} < \varepsilon^2$$

dopodiché, se $n, m \geq n_0$, avremo che $v_n, v_m \in K_{n_0}$ e quindi

$$\|v_n - v_m\| = \sqrt{\|v_n - v_m\|^2} \leq \sqrt{8r \cdot \frac{1}{n_0} - \frac{4}{n_0^2}} < \varepsilon.$$

Ma poiché H è completo (v_n) è anche convergente, cioè $\exists w \in H$ t.c. $v_n \to w$.
Inoltre, poiché W è chiuso e $v_n \in W$ per ogni n, allora anche $w \in W$.
Inoltre deve essere $\|v - w\| = r$ perché:

$$r \leq \|v - w\| = \|v - v_n + v_n - w\| \leq \underbrace{\|v - v_n\|}_{\leq r + \frac{1}{n}} + \underbrace{\|v_n - w\|}_{\to 0}$$

Abbiamo quindi trovato $w \in W$ tale che $d(v,w) = d(v,W)$.
Osserviamo che w è unico perché, se ce ne fosse un altro w' allora sia w che w' sarebbero contenuti in tutti i K_n, quindi per ogni n varrebbe la stima

$$\|w - w'\| \le \sqrt{8r \cdot \frac{1}{n} - \frac{4}{n^2}} \to 0$$

e quindi:

$$\|w - w'\| = 0$$

cioè

$$w = w'$$

Quindi w è unico.
Mostriamo ora che $w - v \in W^\perp$, cioè che $\forall u \in W$ $\langle v-w, u\rangle = 0$.
A tale scopo osserviamo che, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\|v - (w + \lambda u)\|^2 \ge \|v - w\|^2$$

PERCHÉ w È L'ELEMENTO DI W che minimizza la distanza da v

Cioè:

$$\langle (v-w) - \lambda u, (v-w) - \lambda u\rangle \ge \|v-w\|^2$$

cioè:

$$\cancel{\|v-w\|^2} + \lambda^2 \|u\|^2 - 2\lambda\langle v-w, u\rangle \ge \cancel{\|v-w\|^2}$$

cioè:

$$\|u\|^2 \lambda^2 - 2\langle v-w, u\rangle \lambda \ge 0$$

che può essere soddisfatta per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ solo se $-2\langle v-w, u\rangle = 0$
cioè se $\langle v-w, u\rangle = 0$
Quindi $v - w \in W^\perp$.

$\boxed{\text{LEMMA 1}}$ Sia $(H, \langle , \rangle)$ spazio di Hilbert ed $F : H \to \mathbb{R}$ lineare continuo e non identicamente nullo. Allora $W = \{u \in H \mid F(u) = 0\}$ ha codimensione 1.

$\boxed{\text{DIMO}}$ Se F non è identicamente nullo esiste $v_0 \in H$ t.c. $F(v_0) \neq 0$. Passando eventualmente ad un multiplo di v_0 posso sempre supporre che $F(v_0) = 1$
Vogliamo dimostrare che $H = W \oplus \operatorname{span}\{v_0\}$.

Infatti $\forall v \in H$ si ha $F(v)=\lambda$ quindi preso $u = v - \lambda v_0$ si ha:

$$F(u) = F(v - \lambda v_0) = F(v) - \lambda F(v_0) = \lambda - \lambda \cdot 1 = 0$$

Da cui segue che $u \in W$.

Di conseguenza $v = u + \lambda v_0 \in W \oplus \text{span}\{v_0\}$. Visto che questo si può fare $\forall v \in H$ abbiamo che $W \oplus \text{span}\{v_0\} = H$ e quindi W ha codimensione 1.

TEO 4 Sia $(H, \langle , \rangle)$ uno spazio di Hilbert e sia $F: H \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare e continuo. Allora $\exists \xi \in H$ t.c. $\forall v \in H$ $F(v) = \langle \xi, v \rangle$.

DIMO Se F è identicamente nullo il teorema è ovvio. Dimostriamolo per F non identicamente nullo. Segue dal **LEMMA 1** che posso prendere $v_0 \in H$ t.c. $F(v_0)=1$ e $H = \boxed{W} \oplus \text{span}\{v_0\}$. Si noti inoltre che si può sempre fare in modo che $v_0 \in W^\perp$ perché, se già non lo fosse, detto w_0 la sua proiezione su W, avremmo $v_0 - w_0 \in W^\perp$ (per il teorema della proiezione) ed inoltre $F(v_0 - w_0) = F(v_0) - F(w_0) = 1 - 0 = 1$.

$\boxed{W = F^{-1}(0)}$

W è chiuso perché F è continuo

Ciò significa che se v_0 non fosse già in $W^\perp$, potremmo sostituirlo con $v_0 - w_0$.

Quindi, senza perdere di generalità, possiamo sempre supporre di aver preso $v_0 \in W^\perp$ t.c. $F(v_0)=1$ e $H = W \oplus \text{span}\{v_0\}$.

Poniamo ora $\xi = \frac{v_0}{\|v_0\|^2}$ e mostriamo che $\forall v \in H$ si ha $F(v) = \langle \xi, v \rangle$.

Infatti $\forall v \in H$, poiché $H = W \oplus \text{span}\{v_0\}$, possiamo scrivere

$$v = u + \alpha v_0 \quad \text{con } u \in W \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Otteniamo:

$$F(v) = F(u + \alpha v_0) = F(u) + \alpha F(v_0) = 0 + \alpha \cdot 1 = \alpha$$

e

$$\langle \xi, v \rangle = \left\langle \frac{v_0}{\|v_0\|^2}, u + \alpha v_0 \right\rangle = \frac{1}{\|v_0\|^2}\Big(\overbrace{\langle v_0, u \rangle}^{=0 \text{ Perché } u \in W \text{ e } v_0 \in W^\perp} + \alpha \langle v_0, v_0 \rangle \Big) =$$

$$= \frac{1}{\|v_0\|^2}\left(0 + \alpha \|v_0\|^2\right) = \alpha$$

Quindi $\forall v \in H$ si ha $F(v) = \langle \xi, v \rangle$.

ES. 3 Sia $V = \{ (a_n) \text{ successione di in } \mathbb{R} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 < +\infty \}$ e per ogni $\bar{a} = (a_n)$ e $\bar{b} = (b_n)$ in V definiamo $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$.
Dimostreremo in seguito che questo spazio, che indicheremo con ℓ^2, è uno spazio di Hilbert. Quello che vogliamo mostrare ora è che non tutto ciò che vale in $\mathbb{R}^n$ vale anche in uno spazio di Hilbert e in particolare vogliamo mostrare che in ℓ^2 esistono insiemi chiusi e limitati ma non compatti. Ad esempio prendiamo:

$$B = \{ (a_n) \in \ell^2 \mid \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 \leq 1 \}$$

cioè B è la palla chiusa di raggio 1 e centro 0 di ℓ^2.
B è chiaramente chiuso e limitato. Mostriamo che non è compatto.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ prendiamo e_n definito da:

$$e_n = (0, 0, 0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{n-esima posizione}}}{0, 1}, 0, \dots, 0, \dots\dots)$$

Chiaramente $e_n \in B$ visto che $\langle e_n, e_n \rangle = 1$.
Inoltre $\forall n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$ si ha:

$$\| e_n - e_m \| = \sqrt{\langle e_n - e_m, e_n - e_m \rangle} = \sqrt{\langle e_n, e_n \rangle + \langle e_m, e_m \rangle - 2 \langle e_m, e_n \rangle} = \sqrt{2}$$

Ciò significa che dalla successione $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non posso estrarre alcuna sottosuccessione convergente.
Quindi B non è compatto, pur essendo chiuso e limitato.

DEF. 4 Dato $(H, \langle , \rangle)$ spazio di Hilbert e dato $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H$, diremo che $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una Base di Hilbert per H se ha le seguenti proprietà:

1) $\forall i, j \in \mathbb{N}$ $\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

2) $\text{span} \{ e_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ è denso in H.

$\boxed{\text{TEO.5}}$ Sia $(H, \langle , \rangle)$ uno spazio di Hilbert e sia $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una base di Hilbert per H. Allora $\forall v \in H$ si ha:

$$v = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i e_i$$

dove $\alpha_i = \langle v, e_i \rangle$ e vale l'identità:

$$\|v\|^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i^2 \quad \text{(identità di Parseval)}$$