Metodi Matematici - Lez. 13

Titolo nota

12 novembre 2018 (14.00-15.45) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

$\boxed{\text{TEO. 1}}$ Sia $(H, \langle , \rangle)$ uno spazio di Hilbert e sia $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una base di Hilbert per H. Allora $\forall v \in H$ si ha:

$$v = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i e_i$$

dove $\alpha_i = \langle v, e_i \rangle$ e vale l'identità:

$$\|v\|^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i^2 \quad (\text{identità di Parseval})$$

$\boxed{\text{DIMO}}$ Poniamo $V = \text{span}\{e_0, e_1, \dots, e_i, \dots\}$, $V_n = \text{span}\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ e indichiamo con Π_n la proiezione su V_n.

Si noti che $V = \bigcup_{n=0}^{+\infty} V_n$ e che $V_n \subset V_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dal fatto che $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ è una base di Hilbert segue che V è denso in H e quindi, qualsiasi sia $v \in H$ avremo che:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists w \in V \text{ t.c. } \|v - w\| < \varepsilon$$

Ma essendo $V = \bigcup_{n=0}^{+\infty} V_n$ potremo dire che:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} \text{ ed } \exists w \in V_n \text{ t.c. } \|v - w\| < \varepsilon$$

Ma siccome l'elemento di V_n che minimizza la distanza da v è la sua proiezione $\Pi_n(v)$ su V_n possiamo scrivere:

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \|v - \Pi_n(v)\| < \varepsilon$$

Infine, dal fatto che $\forall k \in \mathbb{N}$ si ha $V_k \subset V_{k+1}$ segue che la distanza di $\Pi_k(v)$ da v decresce al crescere di k. Quindi la $(*)$ diventa:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } m \geq n \Rightarrow \|v - \Pi_m(v)\| < \varepsilon$$

Ciò significa che:

$$(\bullet) \qquad \lim_{n \to +\infty} \Pi_n(v) = v$$

Ma grazie al teorema della proiezione abbiamo:

$$(\times) \qquad \Pi_n(v) = \sum_{i=0}^{n} \langle v, e_i \rangle e_i = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i$$

cioè $\Pi_n(v)$ è la somma finita n-esima della serie $\sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i e_i$, quindi la $(\bullet)$ significa che:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i e_i \text{ converge a } v.$$

Mostriamo ora che $\sum_{i=0} \alpha_i^2 = \|v\|^2$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:

APPLICO IL T. DI PITAGORA PERCHÉ $(v - \Pi_n(v)) \in V_n^\perp$

$$\|v\|^2 = \|v - \Pi_n(v) + \Pi_n(v)\|^2 = \|v - \Pi_n(v)\|^2 + \|\Pi_n(v)\|^2$$

quindi:

PERCHÉ $\Pi_n(v) \to v$

$$\|\Pi_n(v)\|^2 = \|v\|^2 - \|v - \Pi_n(v)\|^2 \to \|v\|^2 - 0 = \|v\|^2$$

Ma ricordando $(\times)$ e il fatto che $\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$, abbiamo

$$\|\Pi_n(v)\|^2 = \left\|\sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i\right\|^2 = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^2$$

Quindi:

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^2 = \|v\|^2$$

cioè:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i^2 = \|v\|^2.$$

ESEMPIO 1 Sia $\ell^2 = \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 < +\infty \right\}$ e, per ogni $\bar{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\bar{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ poniamo $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i b_i$. Allora $\langle , \rangle$ è un prodotto scalare su ℓ^2 e con la norma indotta da tale prodotto scalare ℓ^2 risulta completo, cioè di Hilbert.

Dimostreremo alcune cose ovvie, cioè che ℓ^2 è uno spazio vettoriale e che $\langle , \rangle$ è un prodotto scalare, e una cosa non ovvia, cioè che ℓ^2 è completo con la norma indotta da $\langle , \rangle$.

$\boxed{\text{I}}$ ℓ^2 è uno spazio vettoriale perché se $\bar{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\bar{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stanno in ℓ^2 allora anche $\bar{a} + \bar{b} \in \ell^2$ perché:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} (a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i^2 + b_i^2 + 2a_i b_i \le \sum_{i=0}^{+\infty} 2a_i^2 + 2b_i^2 = 2\sum_{i=0}^{+\infty} a_i^2 + 2\sum_{i=0}^{+\infty} b_i^2 < +\infty$$

PERCHÉ $2a_i b_i \le a_i^2 + b_i^2$

PERCHÉ $\bar{a} \in \ell^2$ E $\bar{b} \in \ell^2$

II

Mostriamo che $\langle\, ,\, \rangle$ è un prodotto scalare.

Intanto se $\bar{a}, \bar{b} \in \ell^2$ $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ è ben definito, infatti $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i b_i$ è convergente grazie al criterio dell'assoluta convergenza perché:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} |a_i b_i| \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a_i^2 + b_i^2}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{+\infty} a_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{+\infty} b_i^2 < +\infty .$$

Inoltre $\langle\, ,\, \rangle$ soddisfa le proprietà per essere un prodotto scalare.

(1) $\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i^2 \geq 0$ e vale "=" se e solo se $a_i = 0 \ \forall i \in \mathbb{N}$.

(2) $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i b_i = \sum_{i=0}^{+\infty} b_i a_i = \langle \bar{b}, \bar{a} \rangle$

(3) $\langle \bar{c}, \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} \rangle = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i(\alpha a_i + \beta b_i) = \alpha\sum_{i=0}^{+\infty} c_i a_i + \beta \sum_{i=0}^{+\infty} c_i b_i = \alpha\langle \bar{c}, \bar{a} \rangle + \beta \langle \bar{c}, \bar{b} \rangle$

PERCHÉ TRATTANDOSI DI SERIE CONVERGENTI BASTA CHE L'UGUAGLIANZA VALGA PER TUTTE LE SOMME FINITE

Quindi $\langle\, ,\, \rangle$ è un prodotto scalare e quindi $\|\bar{a}\| = \sqrt{\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=0}^{+\infty} a_i^2}$ è una norma.

III

Rimane solo da dimostrare la completezza di ℓ^2 rispetto a $\|\cdot\|$, cioè che se $(\bar{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in ℓ^2 allora $\exists\, \bar{a} \in \ell^2$ t.c. $\|\bar{a}_n - \bar{a}\| \to 0$.

Immaginiamo la nostra successione nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
\bar{a}_0 &= (a_{0,0}, a_{0,1}, a_{0,2}, \dots, a_{0,k}, \dots \dots) \\
\bar{a}_1 &= (a_{1,0}, a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,k}, \dots \dots) \\
\bar{a}_2 &= (a_{2,0}, a_{2,1}, a_{2,2}, \dots, a_{2,k}, \dots \dots) \\
&\vdots \\
\bar{a}_n &= (a_{n,0}, a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,k}, \dots \dots) \\
&\vdots \\
\bar{a}_m &= (a_{m,0}, a_{m,1}, a_{m,2}, \dots, a_{m,k}, \dots \dots) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Dire che $(\bar{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy significa dire che:

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ \text{t.c.} \ \forall n, m \geq n_0 \ \text{si ha} \ \|\bar{a}_n - \bar{a}_m\| \leq \varepsilon$$

Però $\forall k \in \mathbb{N}$ si ha:

$$|a_{n,k} - a_{m,k}| = \sqrt{(a_{n,k} - a_{m,k})^2} \leq \sqrt{\sum_{i=0}^{+\infty} (a_{n,i} - a_{m,i})^2} = \| \bar{a}_n - \bar{a}_m \|$$

che, combinata con la $(*)$, permette di affermare che $\forall k \in \mathbb{N}$ $(a_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy e quindi converge a un limite che indichiamo con a_k.
Indichiamo con $\bar{a}$ la successione che ha come termini gli a_k.

Si tratta di mostrare che: (1) $\bar{a} \in \ell^2$; (2) $\bar{a}_n \to \bar{a}$.

Cominciamo da (1). Ricordiamo che se $(\bar{a}_n)$ è di Cauchy allora è anche limitata, cioè $\exists M > 0$ t.c. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\| a_n \|^2 \leq M$, cioè

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=0}^{+\infty} a_{n,i}^2 \leq M.$$

Di conseguenza:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall k \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=0}^{k} a_{n,i}^2 \leq M$$

Per ogni fissato $k \in \mathbb{N}$ passo al limite per $n \to +\infty$ (posso perché sono somme finite) e, visto che $a_{n,i} \to a_i$, ottengo:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=0}^{k} a_i^2 \leq M$$

Ma allora, passando al limite per $k \to +\infty$, si ottiene $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i^2 \leq M$.
Ciò significa che $\bar{a} \in \ell^2$.

Rimane solo da dimostrare che $\| \bar{a}_n - \bar{a} \| \to 0$.
Sappiamo che:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n, m \geq n_0 \text{ si ha } \| \bar{a}_n - \bar{a}_m \|^2 \leq \varepsilon$$

Cioè che:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n, m \geq n_0 \text{ si ha } \sum_{i=0}^{+\infty} (a_{n,i} - a_{m,i})^2 \leq \varepsilon$$

Da cui segue che:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n,m\geq n_0\ \forall k\in\mathbb{N} \text{ si ha } \sum_{i=0}^{k}(a_{n,i}-a_{m,i})^2\leq\varepsilon$$

Ma allora, fissati k e n passo al limite per $m\to+\infty$ (posso perché sono somme finite) e ottengo:

$$(\square)\qquad \forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n\geq n_0\ \forall k\in\mathbb{N} \text{ si ha } \sum_{i=0}^{k}(a_{n,i}-a_i)^2\leq\varepsilon$$

Ma dal fatto che $\sum_{i=0}^{k}(a_{n,i}-a_i)^2\leq\varepsilon$ per ogni k, segue che $\sum_{i=0}^{+\infty}(a_{n,i}-a_i)^2\leq\varepsilon$, cioè che $\|\bar{a}_n-\bar{a}\|^2<\varepsilon$. Quindi la $(\square)$ diventa:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n\geq n_0 \text{ si ha } \|\bar{a}_n-\bar{a}\|^2\leq\varepsilon$$

Ciò significa proprio che $\bar{a}_n\to\bar{a}$, che è quanto volevamo dimostrare.

OSS 1 Per avere una base di Hilbert di ℓ^2 basta prendere $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ dove $e_i=(0,0,0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ i\text{-esima coordinata}}}{1},0,\dots)$.

ESERCIZIO 1 Trovare una successione $(\bar{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in ℓ^2 tale che $\bar{a}_n\not\to\bar{0}$ in ℓ^2, ma $\forall k\in\mathbb{N}$ $a_{n,k}\to 0$ per $n\to+\infty$.

SVOLGIMENTO Basta prendere

$$a_n=(\underbrace{\tfrac{1}{n},\tfrac{1}{n},\dots,\tfrac{1}{n}}_{n^2},0,0,\dots\dots,0,\dots)$$

Chiaramente $a_{n,k}\to 0$ per ogni fissato k, tuttavia $\forall n\in\mathbb{N}$ si ha.

$$\|\bar{a}_n-\bar{0}\|^2=\sum_{i=0}^{n^2-1}\frac{1}{n^2}=1$$

quindi $\bar{a}_n\not\to\bar{0}$.
