Metodi Matematici - Lez. 14

Titolo nota

13 novembre 2018 (9.30-11.15) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

DEF. 1 Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ insieme misurabile, definiamo

$$L^2(E) = \left\{ f : E \to \mathbb{R}^* \;\middle|\; f \text{ è misurabile e } f^2 \text{ è sommabile} \right\} \Big/ \sim$$

dove $\sim$ è la seguente relazione di equivalenza:

$f \sim g \iff$ l'insieme $\{x \in E \mid f(x) \neq g(x)\}$ ha misura nulla.

Enunciamo ora, senza dimostrazione, alcuni teoremi analoghi ad altri già enunciati e dimostrati per $L^1(E)$.

TEO 1 Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ ed $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili e a quadrato sommabile che sia di Cauchy con la norma $\|\cdot\|_2$.
Allora $\exists\, f : E \to \mathbb{R}^*$ misurabile e a quadrato sommabile t.c. $\|f_n - f\|_2 \to 0$.

TEO 2 $C_0(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^2(\mathbb{R}^n)$

OSS 1 Dal fatto che $C_0(\mathbb{R})$ è denso in $L^2(\mathbb{R})$ segue subito che $C([-\pi,\pi])$ è denso in $L^2([-\pi,\pi])$. Infatti presa $f \in L^2([-\pi,\pi])$ ed $\varepsilon > 0$, posto:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [-\pi,\pi] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha che $F(x) \in L^2(\mathbb{R})$ e quindi dal TEO. 2 segue che $\exists\, G(x) \in C_0(\mathbb{R})$ t.c. $\|F(x) - G(x)\|_2 < \varepsilon$. Ma allora, detta $g = G|_{[-\pi,\pi]}$, si ha che $g \in C([-\pi,\pi])$ e inoltre:

$$\|f(x) - g(x)\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x))^2\,dx \leq \int_{\mathbb{R}} (F(x) - G(x))^2\,dx = \|F(x) - G(x)\|_2^2 < \varepsilon^2$$

OSS.2 Grazie al TEO.1, $L^2([-\pi,\pi])$ dotato del prodotto scalare canonico $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$ è completo e quindi è uno sp. di Hilbert.
Nel prossimo teorema che dimostreremo ne esibiremo una base di Hilbert, ma prima di ciò abbiamo bisogno di ricordare una definizione e un risultato sulle serie di Fourier:

DEF. 1 Una funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ si dirà regolare a tratti in $[a,b]$ se esiste una partizione $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ di $[a,b]$ tale che:

1) $f\in C^1((x_i,x_{i+1}))$ per ogni $i=0,\dots,n-1$.
2) Su ogni intervallo (x_i,x_{i+1}) esistono finiti i limiti sia di $f(x)$ che di $f'(x)$ per $x\to x_i^+$ e per $x\to x_{i+1}^-$.

TEO 3 Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua, periodica di periodo 2π e regolare a tratti su $[-\pi,\pi]$. Per ogni n intero positivo definiamo:

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx + b_k \sin kx$$

dove $\forall k\in\mathbb{N}$ definiamo:

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

Allora $S_n(x)\to f(x)$ uniformemente su tutto $\mathbb{R}$.

TEO. 4 Dato $L^2([-\pi,\pi])$ con il solito prodotto scalare $\langle\,,\rangle$. Una sua base di Hilbert è data da:

$$\mathcal{B}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\dots,\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\dots\right\}$$

$\boxed{\text{DIMO}}$ I calcoli per verificare che $\mathcal{B}$ è un insieme ortonormale sono già stati visti in altre occasioni. Per mostrare che è una base di Hilbert basta verificare che span $\mathcal{B}$ è denso in $L^2([-\pi,\pi])$. Lo faremo in 3 passi.

$\boxed{\text{I° Passo}}$ $\forall f \in L^2([-\pi,\pi])$ $\forall \varepsilon>0$ $\exists g \in C([-\pi,\pi])$ t.c. $\|f-g\|_2 < \varepsilon$

$\boxed{\text{II° Passo}}$ $\forall g \in C([-\pi,\pi])$ $\forall \varepsilon>0$ $\exists h:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ continua e lineare a tratti tale che $h(-\pi)=h(\pi)=0$ e $\|g-h\|_2<\varepsilon$

$\boxed{\text{III° Passo}}$ $\forall h:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ continua, lineare a tratti e nulla nel bordo, $\forall\varepsilon>0$, $\exists S \in \text{span}(\mathcal{B})$ tale che $\|h-S\|_2<\varepsilon$

È chiaro che una volta dimostrati i 3 passi ho la tesi, perché, $\forall f\in L^2([-\pi,\pi])$ $\forall\varepsilon>0$, grazie al I° passo posso scegliere $g\in C([-\pi,\pi])$ t.c. $\|f-g\|_2<\frac{\varepsilon}{3}$. Dopodiché, grazie al II° passo scelgo h continua, nulla nel bordo e lineare a tratti tale che $\|g-h\|_2<\frac{\varepsilon}{3}$. Infine, grazie al III° passo, trovo $S\in$ span $\mathcal{B}$ tale che $\|h-S\|_2<\frac{\varepsilon}{3}$. Quindi ho trovato $S \in$ span $\mathcal{B}$ tale che:

$$\|f-S\|_2 < \|f-g\|_2+\|g-h\|_2+\|h-S\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

Quindi, se dimostrerò i 3 passi sopra, avrò dimostrato che ogni $f\in L^2([-\pi,\pi])$ è approssimabile bene quanto si vuole con oggetti di span $\mathcal{B}$, cioè avrò dimostrato che span $\mathcal{B}$ è denso in $L^2([-\pi,\pi])$.
Ci rimane quindi da dimostrare i 3 passi.

$\boxed{\text{I° Passo}}$ La dimostrazione è ovvia perché sappiamo già che $C([-\pi,\pi])$ è denso in $L^2([-\pi,\pi])$.

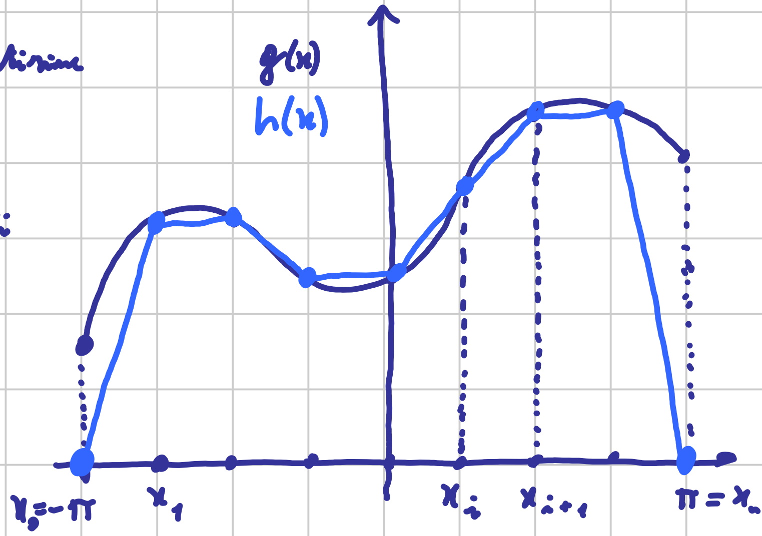
$\boxed{\text{II Passo}}$ Da $g\in C([-\pi,\pi])$ segue che g è limitata, quindi $\|g\|_\infty<+\infty$, e anche che g è uniformemente continua (per il T. di Heine Cantor).

Di conseguenza, fissato $\varepsilon>0$, posso scegliere $\delta>0$ in modo che valgano simultaneamente le 2 proprietà:

1) $\delta < \dfrac{\varepsilon^2}{3\|g\|_\infty^2}$

2) $\forall x_1,x_2 \in [-\pi,\pi] \quad |x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |g(x_1)-g(x_2)| < \sqrt{\dfrac{\varepsilon^2}{6\pi}}$

Sia ora $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ una partizione di $[-\pi,\pi]$ con finezza $<\delta$, e sia $h(x)$ la funzione lineare a tratti nulla al bordo e che ha per "vertici" i punti $(x_i, f(x_i))$ con $i=0,1,\dots,(n-1)$. (vedi figura)



Otteniamo che:

$$\|g(x)-h(x)\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (g(x)-h(x))^2\,dx =$$

SE $x\in(x_i,x_{i+1})$ $\exists\, \bar{x}\in(x_i,x_{i+1})$ t.c. $h(x)=g(\bar{x})$
quindi $|g(x)-h(x)| = |g(x)-h(\bar{x})| \le \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{6\pi}}$
grazie alla (2)

$$= \int_{-\pi}^{-\pi+\delta} (g(x)-h(x))^2\,dx + \int_{-\pi+\delta}^{\pi-\delta} (g(x)-h(x))^2\,dx + \int_{\pi-\delta}^{\pi} (g(x)-h(x))^2\,dx \le$$

$$\le \int_{-\pi}^{-\pi+\delta} \|g\|_\infty^2\,dx + \int_{-\pi+\delta}^{\pi-\delta} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{6\pi}}\right)^2 dx + \int_{\pi-\delta}^{\pi} \|g\|_\infty^2\,dx =$$

$$= \delta\cdot\|g\|_\infty^2 + (2\pi-\delta)\frac{\varepsilon^2}{6\pi} + \delta\cdot\|g\|_\infty^2 <$$

$$< \frac{\varepsilon^2}{3\cancel{\|g\|_\infty^2}}\cdot\cancel{\|g\|_\infty^2} + \cancel{2\pi}\frac{\varepsilon^2}{\cancel{6\pi}_{3}} + \frac{\varepsilon^2}{3\cancel{\|g\|_\infty^2}}\cdot\cancel{\|g\|_\infty^2} = \frac{\varepsilon^2}{3}+\frac{\varepsilon^2}{3}+\frac{\varepsilon^2}{3} = \varepsilon^2$$

Ciò significa che $\forall g\in C([-\pi,\pi])$ e $\forall \varepsilon>0$ $\exists\, h:[-\pi,\pi]$ continua, lineare a tratti e nulla al bordo che dista da g meno di ε, che è quanto volevamo dimostrare.

$\boxed{\text{III Passo}}$ Segue subito dal TEO.3. Infatti se $h:[-\pi,\pi]$ è lineare a tratti:

continua e nulla al bordo, prolungabile per periodicità otteniamo una funzione $H: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, periodica di periodo 2π e regolare a tratti. Grazie al TEO.3, $S_n(x) \to H(x)$ uniformemente su tutto $\mathbb{R}$, quindi, restringendosi a $[-\pi, \pi]$, $S_n(x) \to h(x)$ uniformemente su $[-\pi, \pi]$ e quindi anche con $\|\cdot\|_2$. La tesi segue osservando che, $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n \in \operatorname{Span} \mathcal{B}$.