Metodi Matematici - Lez. 15

Titolo nota

19 novembre 2018 (14.00-15.45) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma *Tor Vergata*

ESERCIZI SU PRODOTTI SCALARI E SPAZI DI HILBERT

(Tutti gli esercizi che seguono sono presi dalla lista 1.bis, alla quale si riferisce la numerazione)

ES. 1,2,3 (a) Mostrare che $(f,g)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$ è un prodotto scalare su $L^2([-\pi,\pi])$ che mantiene la stessa perpendicolarità del prodotto scalare canonico $\langle\,,\rangle$ e tale che $\|\cdot\|_{(,)}$ è equivalente a $\|\cdot\|_2$.

SOLUZIONE Segue tutto in modo ovvio dal fatto che è del tipo:

$$(f,g)=c\langle f,g\rangle \quad \text{con } c>0.$$

La verifica delle 3 proprietà di prodotto scalare è immediata.
La norma $\|\ \|_{(,)}$ è equivalente a $\|\ \|_2$ perché:

$$\|f\|_{(,)}=\sqrt{(f,f)}=\sqrt{\tfrac{1}{\pi}\langle f,f\rangle}=\tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\|f\|_2$$

Infine la perpendicolarità si mantiene perché:

$$(f,g)=0 \iff \tfrac{1}{\pi}\langle f,g\rangle=0 \iff \langle f,g\rangle=0$$

ES. 1(b) Mostrare che $(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)g(x)|\,dx$ non è un prodotto scalare su $L^2([-\pi,\pi])$.

SOLUZIONE Basta osservare che non vale la proprietà $(\lambda f,g)=\lambda(f,g)$.
Ad esempio se $\lambda=-3$ si ha:

$$(-3f,g)=\int_{-\pi}^{\pi}|-3f(x)\cdot g(x)|\,dx=3\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)g(x)|=3(f,g)$$

Quindi, a meno che non sia $(f,g)=0$, si ha $(-3f,g)\neq-3(f,g)$.

ES. 1 (c) Mostrare che $(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^3(g(x))^3\,dx$ non è un prodotto scalare in $L^2([-\pi,\pi])$.

SOLUZIONE Basta osservare che non è nemmeno definito per tutte le coppie $f,g\in L^2([-\pi,\pi])$. Infatti, prese $f(x)=g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\in L^2([-\pi,\pi])$ si ha:

$$(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{x^2}\,dx=+\infty$$

ES. 1 (f) Mostrare che $(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi}(1+x^2)f(x)g(x)$ è un prodotto scalare in $L^2([-\pi,\pi])$ e che $\|\ \|_{(,)}$ è equivalente a $\|\cdot\|_2$. Tuttavia $(f,g)=0 \not\Leftrightarrow \langle f,g\rangle=0$, dove $\langle\,,\rangle$ è il prodotto scalare canonico.

SOLUZIONE Intanto, essendo $(1+x^2)$ continua su $[-\pi,\pi]$ e quindi anche limitata, se $f(x)\in L^2([-\pi,\pi])$ anche $(1+x^2)f(x)\in L^2([-\pi,\pi])$, quindi (f,g) è ben definito per ogni $f,g\in L^2([-\pi,\pi])$.

Verifichiamo che ha le proprietà di un prodotto scalare:

1) $(f,g)=(g,f)$ (ovvio)

2) $$(f,\alpha g+\beta h)=\langle(1+x^2)f(x),\alpha g(x)+\beta h(x)\rangle=$$
$$=\alpha\langle(1+x^2)f(x),g(x)\rangle+\beta\langle(1+x^2)f(x),h(x)\rangle=$$
$$=\alpha(f,g)+\beta(f,h)$$

3) $$(f,f)=\int_{-\pi}^{\pi}(1+x^2)(f(x))^2\,dx\geq 0$$

UGUAGLIANZA VALE $\Leftrightarrow$ $(1+x^2)(f(x))^2=0$ q.o.

VALE $\Leftrightarrow$ $f(x)=0$

Quindi $(f,f)=0$ se e solo se $f(x)=0$ q.o.

Quindi (f,g) è un prodotto scalare.

Inoltre $\|\cdot\|_{(,)}$ è equivalente a $\|\ \|_2$ perché su $[-\pi,\pi]$ si ha

$$1 \le 1+x^2 \le 1+\pi^2$$

e quindi:

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx \le \int_{-\pi}^{\pi}(1+x^2)(f(x))^2\,dx \le (1+\pi^2)\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx$$

da cui segue:

$$\|f\|_2 \le \|f\|_{(,)} \le \sqrt{1+\pi^2}\cdot\|f\|_2$$

Infine osserviamo che se $f \perp g$ secondo il prodotto scalare canonico non lo sono necessariamente anche secondo $(\ ,\ )$. Infatti basta prendere $f(x)=\sin x$ e $g(x)=\sin 2x$. Sappiamo già che $\langle \sin x, \sin 2x\rangle = 0$. Mostriamo che $(\sin x, \sin 2x) \neq 0$.

$$(\sin x, \sin 2x) = \int_{-\pi}^{\pi}(1+x^2)\sin x\cdot\sin 2x\,dx$$

Si può ovviamente calcolare tale integrale osservando che:

$$\sin x\cdot\sin 2x = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x)$$

e poi integrando ripetutamente per parti.
Tuttavia si può riconoscere che il risultato è negativo anche senza calcolarlo, procedendo nel modo seguente:

$$\int_{-\pi}^{\pi}(1+x^2)\sin x\cdot\sin 2x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}(1+x^2)\cdot 2\sin^2 x\cos x\,dx \overset{\text{PERCHÉ INTEGRANDA È PARI}}{=} 4\int_{0}^{\pi}(1+x^2)\sin^2 x\cdot\cos x\,dx =$$

(*)
$$= 4\Bigg(\underbrace{\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+x^2)\sin^2 x\cdot\cos x\,dx}_{1} + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1+x^2)\sin^2 x\cos x\,dx}_{2}\Bigg)$$

Si noti ora che:

$$(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+x^2)\sin^2 x \cos x \, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\frac{\pi^2}{4}\right) \sin^2 x \cos x \, dx = \left(1+\frac{\pi^2}{4}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$$

PERCHÉ SU $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\sin^2 x \cos x \geq 0$
E MAX $(1+x^2) = 1 + \frac{\pi^2}{4}$

$$(1) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1+x^2)\sin^2 x \cos x \, dx < \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(1+\frac{\pi^2}{4}\right) \sin^2 x \cos x \, dx = \left(1+\frac{\pi^2}{4}\right) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x \cos x \, dx$$

PERCHÉ SU $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\sin^2 x \cos x < 0$
E MIN $(1+x^2) = 1 + \frac{\pi^2}{4}$

Quindi, continuando la (✱) si ottiene:

$$(\sin x, \sin 2x) = (1) + (2) < 4\left(1+\frac{\pi^2}{4}\right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x \cos x \, dx \right) =$$

$$= 4 \cdot \left(1+\frac{\pi^2}{4}\right) \cdot \int_0^{\pi} \sin^2 x \cos x \, dx = 4 \cdot \left(1+\frac{\pi^2}{4}\right) \cdot 0 = 0$$

PERCHÉ IL GRAFICO DI $\sin^2 x \cos x$ È SIMMETRICO RISPETTO AL PUNTO $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

Quindi $(\sin x, \sin 2x) < 0$ mentre $\langle \sin x, \sin 2x \rangle = 0$.
Ciò significa che prese $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \sin 2x$ si ha $f \perp g$ secondo $\langle , \rangle$, ma $f \not\perp g$ secondo $(,)$.

ES. 4 Su $L^2([-\pi, \pi])$ prendiamo $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 f(x) g(x) \, dx$.
Mostriamo che, pur essendo $(,)$ un prodotto scalare, $\| \ \|_{(,)}$ non è equivalente a $\| \ \|_2$. Inoltre $L^2([-\pi, \pi])$ non è completo con tale norma.
Per avere uno spazio completo con $\| \cdot \|_{(,)}$ dobbiamo prendere:

$$W = \{ f : [-\pi, \pi] \mid f \text{ è misurabile e } x^2 f^2 \text{ è sommabile} \} / \sim$$

dove $\sim$ è la solita relazione di equivalenza che identifica tra loro le funzioni che coincidono quasi ovunque.

$\boxed{\text{SVOLGIMENTO}}$ La verifica che $(\,,\,)$ è un prodotto scalare e che non dà luogo alla stessa perpendicolarità di $\langle\,,\,\rangle$ è del tutto analoga a quella del problema precedente e la omettiamo.

Mostriamo invece che $\|\;\|_{(,)}$ e $\|\;\|_2$ non sono equivalenti, cioè che non è possibile trovare 2 positive C_1 e C_2 tali che, $\forall f \in L^2([-\pi,\pi])$ si abbia:

$$C_1 \|f\|_2 \leq \|f\|_{(,)} \leq C_2 \|f\|_2$$

In realtà, di queste disuguaglianze, la seconda vale, visto che:

$$\|f\|^2_{(,)} = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 (f(x))^2 \, dx \leq \pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx = \pi^2 \|f\|_2^2$$

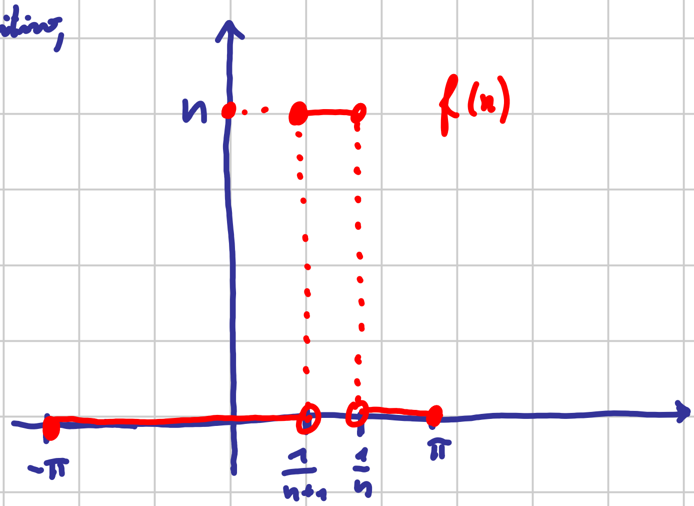
da cui segue:

$$\|f\|_{(,)} \leq \pi \|f\|_2$$

Per mostrare che invece la prima disuguaglianza non vale, basta esibire una successione (f_n) di funzioni di $L^2([-\pi,\pi])$ tali che $\|f_n\|_{(,)} \to 0$ ma $\|f_n\|_2 \not\to 0$.

A tale scopo, per ogni n intero positivo, prendiamo:

$$f_n(x) = \chi_{\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]}(x) \cdot n$$



Si ha:

$$\|f_n\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f_n(x))^2 \, dx = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} n^2 \, dx = n^2 \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n^2}{n(n+1)} \longrightarrow 1$$

$$\|f_n\|_{(,)}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot (f_n(x))^2 \, dx = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} x^2 n^2 \, dx = n^2 \cdot \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} x^2 \, dx =$$

$$= n^2 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{n^3} \right) \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to +\infty$$

Quindi, il fatto che $\|f_n\|_{(,)}$ diventi arbitrariamente piccola, mentre $\|f_n\|_2$ si stabilizzi a 1 ci toglie la possibilità che possa esistere una costante $c > 0$ tale che $\|f_n\|_2 \leq C \|f_n\|_{(,)}$ per ogni n.
Quindi $\| \ \|_2$ e $\| \ \|_{(,)}$ non sono equivalenti.
Con un trucco analogo si riesce a verificare che $L^2([-\pi, \pi])$ non è completo con $\|\cdot\|_{(,)}$.
Per cominciare verifichiamo che W è completo con $\|\cdot\|_{(,)}$. Infatti, presa (f_n) di Cauchy in W con $\|\cdot\|_{(,)}$, poiché:

$$\|f_n\|_{(,)} = \| |x| f_n(x) \|_2$$

avremo che $(|x| f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in $L^2([-\pi, \pi])$ con $\|\cdot\|_2$ e quindi $\exists g \in L^2([-\pi, \pi])$ t.c.

(*) $$\| |x| f_n(x) - g(x) \|_2 \to 0$$

Notiamo che se $g(x) \in L^2([-\pi, \pi])$ allora la funzione $h(x) = \frac{g(x)}{|x|}$ sta in W.
Possiamo quindi riscrivere la (*) come

$$\left\| |x| \left(f_n(x) - \frac{g(x)}{|x|} \right) \right\|_2 \to 0$$

cioè come

$$\| f_n(x) - h(x) \|_{(,)} \to 0$$

Quindi abbiamo trovato $h \in W$ t.c. $f_n \to h$ con $\|\cdot\|_{(,)}$.
Ciò significa che W è completo con $\|\cdot\|_{(,)}$.
Mostriamo che $L^2([-\pi, \pi])$ non è un sottospazio chiuso di W con $\|\cdot\|_{(,)}$.

Infatti, per ogni n intero positivo definiamo:

$$f_n(x) = \frac{1}{x} \cdot \chi_{[\frac{1}{n}, \pi]}(x)$$

Se poniamo $f(x) = \frac{1}{x}\chi_{[0,\pi]}$ abbiamo che $f_n \to f$ con $\|\cdot\|_{(,)}$ perché:

$$\|f - f_n\|^2_{(,)} = \int_0^{\frac{1}{n}} x^2 \cdot \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{1}{n} \to 0$$

ma $f_n \notin L^2([-\pi,\pi])$, visto che:

$$\|f\|_2^2 = \int_0^{\pi} \frac{1}{x^2}\, dx = +\infty .$$

Invece tutte le f_n stanno in $L^2([-\pi,\pi])$ visto che sono limitate.
Abbiamo quindi trovato (f_n) in $L^2([-\pi,\pi])$ che converge, rispetto a $\|\cdot\|_{(,)}$, a una $f \in W - L^2([-\pi,\pi])$. Ciò significa che $L^2([-\pi,\pi])$ non è un sottospazio chiuso di $(W, (\,,\,))$.
Quindi $L^2([-\pi,\pi])$ non può essere completo rispetto a $\|\cdot\|_{(,)}$.