Metodi Matematici - Lez. 16+Exe

Titolo nota

20 novembre 2018 (9.30-11.15, 11.30-12:15) - docente: Prof. **E. Callegari** - Università di Roma **Tor**

Prima di proseguire con gli esercizi, ricordiamo 2 risultati sulle serie di Fourier, senza dimostrazione.

DEF. 1 Una funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ si dirà regolare a tratti in $[a,b]$ se esiste una partizione $P=\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ di $[a,b]$ tale che:

1) $f\in C^1((x_i, x_{i+1}))$ per ogni $i=0,\dots,n-1$.
2) Su ogni intervallo (x_i, x_{i+1}) esistono finiti i limiti sia di $f(x)$ che di $f'(x)$ per $x\to x_i^+$ e per $x\to x_{i+1}^-$.

TEO 1 Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ periodica di periodo 2π e regolare a tratti su $[-\pi,\pi]$. Per ogni n intero positivo definiamo:

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx + b_k \sin kx$$

dove $\forall k\in\mathbb{N}$ definiamo:

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx.$$

Allora per ogni $x\in\mathbb{R}$ si ha $S_n(x)\to\dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$, dove si intende: $f(x^\pm)=\lim_{t\to x^\pm} f(t)$.

Inoltre se f è continua su $[a,b]$ allora $S_n\to f$ uniformemente su $[a,b]$.

TEO 2 Se, oltre alle ipotesi del T.1, f è anche continua su tutto $\mathbb{R}$, allora $S_n\to f$ uniformemente su tutto $\mathbb{R}$.

OSS 1 La serie avente le $S_n(x)$ come somme parziali prende il nome di serie di Fourier di $f(x)$.

ES. 4-13 LISTA 2 Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo 2π, tale che $f(x) = x$ per $x \in [-\pi, \pi)$. Determinare la serie di Fourier di $f(x)$ e studiarne la convergenza, poi utilizzare la serie trovata per calcolare il valore di $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

SOLUZIONE Poiché $f(x)$ è dispari si ha $a_k = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Calcoliamo b_k. Si ha:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(kx)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin(kx)\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cdot \left(-\frac{1}{k}\cos(kx)\right)' dx = \frac{2}{\pi}\left[x\cdot\left(-\frac{1}{k}\right)\cos(kx)\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1 \cdot \frac{1}{k}\cos(kx)\, dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{k}\cos(k\pi) + \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi}\cos(kx)\, dx = -\frac{2}{k}\cos(k\pi) + 0 = -\frac{2}{k}\cdot(-1)^k$$

Quindi la serie di Fourier di $f(x)$ è data da:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k}(-1)^{k+1}\sin(kx)$$

che converge uniformemente a $f(x)$ su $[2k\pi - a, 2k\pi + a]$ con $0 \leq a < \pi$, ma non su tutto $\mathbb{R}$, visto che la funzione limite è discontinua nei punti del tipo $\pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.
Nei punti di discontinuità c'è solo convergenza puntuale a 0.
Usando l'identità di Parseval (rispetto al prodotto scalare $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f \cdot g$) otteniamo:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 + b_k^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2\, dx$$

cioè:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{k}\cdot(-1)^{k+1}\right)^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2}{3}\pi^3 = \frac{2}{3}\pi^2$$

cioè:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k^2} = \frac{2}{3}\pi^2$$

cioè:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

ES. 5-14 LISTA 2 Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo 2π, tale che $f(x) = |x|$ per $x \in [-\pi, \pi)$.
Determinare la serie di Fourier di $f(x)$ e studiarne la convergenza, poi utilizzare la serie trovata per calcolare il valore di $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

SOLUZIONE Stavolta, essendo $f(x)$ pari, abbiamo $b_k = 0$ per ogni k. Calcoliamo a_k.
Si ha:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\pi^2 = \pi$$

se $k \geq 1$ si ha:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(kx)\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot\left(\frac{1}{k}\sin(kx)\right)' dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{k}\cdot\sin(kx)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{k}\cdot\sin(kx)\,dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi\cdot k}\left[-\frac{1}{k}\cos(kx)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2}\left(\cos(k\pi) - 1\right) = \frac{2}{\pi k^2}\left((-1)^k - 1\right) =$$

$$= \begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ -\frac{4}{\pi k^2} & k \text{ dispari} \end{cases}$$

Quindi la serie di Fourier di f è data da:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-4}{\pi(2n-1)^2}\cdot\cos((2n-1)x)$$

e la convergenza è uniforme su tutto $\mathbb{R}$.
In particolare la convergenza per $x=0$ ci dice che:

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-4}{\pi(2n-1)^2}\cdot\cos(0) = f(0)$$

cioè:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = 0$$

cioè:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

ES 5 LISTA 1BIS Su ℓ^2 prendiamo $(\bar{a},\bar{b}) = \sum_{n=0}^{+\infty}((-1)^n+2)a_nb_n$. Mostrare che $(\,,\,)$ è un prodotto scalare e che $\|\cdot\|_{(,)}$ è equivalente a $\|\cdot\|_2$.

SOLUZIONE Intanto $(\,,\,)$ è sicuramente ben definito per ogni $\bar{a},\bar{b}\in\ell^2$.

Infatti:

$$\left|((-1)^n+2)a_nb_n\right| \le 3\cdot|a_n|\cdot|b_n| \le \frac{3}{2}(a_n^2+b_n^2)$$

Da ciò, usando il fatto che $\sum a_n^2$ e $\sum b_n^2$ convergono, segue che $\sum_{n=0}^{+\infty}((-1)^n+2)a_nb_n$ converge assolutamente e quindi anche semplicemente.

Quindi $(\bar{a},\bar{b})$ è definito per ogni $\bar{a},\bar{b}\in\ell^2$.

Per mostrare che è un prodotto scalare osserviamo che:

1) $(\bar{a},\bar{b})=(\bar{b},\bar{a})$ (ovvio)

2) $(\alpha\bar{a}+\beta\bar{b},\bar{c}) = \sum_{n=0}^{+\infty}((-1)^n+2)\cdot(\alpha a_n+\beta b_n)c_n =$ PERCHÈ TUTTE LE SERIE COINVOLTE CONVERGONO

$$= \alpha\sum_{n=0}^{+\infty}((-1)^n+2)a_nc_n + \beta\sum_{n=0}^{+\infty}((-1)^n+2)b_nc_n = \alpha(\bar{a},\bar{c})+\beta(\bar{b},\bar{c})$$

3) $(\bar{a},\bar{a}) = \sum_{n=0}^{+\infty}((-1)^n+2)\cdot a_n^2 \geq 0$ VALE "=" SE E SOLO SE $a_n=0$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Mostriamo infine che $\|\cdot\|_{(,)}$ è equivalente a $\|\cdot\|_2$.

Infatti vale la disuguaglianza

$$1\cdot a_n^2 \le ((-1)^n+2)a_n^2 \le 3\cdot a_n^2$$

di conseguenza, $\forall\bar{a}\in\ell^2$, si ha:

$$1\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}a_n^2 \le \sum_{n=0}^{+\infty}((-1)^n+2)a_n^2 \le 3\sum_{n=0}^{+\infty}a_n^2$$

cioè:

$$1\cdot\|\bar{a}\|_2^2 \le \|\bar{a}\|_{(,)}^2 \le 3\cdot\|\bar{a}\|_2^2$$

Quindi $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_{(,)}$ sono equivalenti.

ES 6 LISTA 1BIS Su ℓ^2 prendiamo $(\bar{a},\bar{b}) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}a_nb_n$. Mostrare che $(\,,\,)$ è un prodotto scalare ma che $\|\cdot\|_{(,)}$ non è equivalente a $\|\cdot\|_2$.

Mostrare poi che, con la norma $\|\cdot\|_{(,)}$, ℓ^2 non è completo mentre invece lo è lo spazio $W=\{(a_n) \mid \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}a_n^2<+\infty\}$.

$\boxed{\text{SOLUZIONE}}$ Intanto $(\bar{a}, \bar{b})$ è ben definito $\forall\, \bar{a}, \bar{b} \in \ell^2$ perché vale la disuguaglianza:

$$\left| \frac{1}{n+1} \cdot a_n \cdot b_n \right| \le \frac{1}{n+1} \cdot |a_n| \cdot |b_n| \le |a_n| \cdot |b_n| \le \frac{1}{2}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

e quindi, dal fatto che $\sum a_n^2$ e $\sum b_n^2$ convergono, segue che $\sum \frac{1}{n+1} a_n b_n$ è assolutamente convergente e quindi anche convergente.

Quindi $(\bar{a}, \bar{b})$ è definito per ogni $\bar{a}, \bar{b} \in \ell^2$.

La verifica che è un prodotto scalare è del tutto analoga a quella dell'esercizio precedente e la omettiamo.

Confrontiamo ora $\|\cdot\|_{(,)}$ con $\|\cdot\|_2$.

Vale ovviamente la disuguaglianza $\|\cdot\|_{(,)} \le C \|\cdot\|_2$ perché, $\forall\, \bar{a} \in \ell^2$, si ha:

$$\|\bar{a}\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} a_n^2 \le \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 = \|\bar{a}\|_2$$

Per mostrare che invece l'altra disuguaglianza non vale osserviamo che se indichiamo con e_n l'n-esimo elemento della base canonica di ℓ^2, cioè

$$e_n = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{n-esima posizione}}, 0, \dots, 0, \dots)$$

allora si ha:

$$\|e_n\|_2^2 = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

ma

$$\|e_n\|_{(,)}^2 = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to +\infty$$

Quindi non ci sono speranze di trovare una costante $C > 0$ t.c. $\forall n \in \mathbb{N}$ si abbia $\|e_n\|_2 \le C \|e_n\|_{(,)}$ visto che $\|e_n\| = 1$ mentre $\|e_n\|_{(,)} \to 0$.

Ciò significa che $\|\cdot\|_{(,)}$ e $\|\cdot\|_2$ non sono equivalenti.

Per mostrare che ℓ^2 non è completo con $(\,,\,)$ prendiamo $(\bar{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definita da

$$\bar{a}_n = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n+1}}, 0, 0, 0, \dots \right)$$

cioè:

$$a_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k+1}} & \text{per } k = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{per } k \ge n+1 \end{cases}.$$

Prendiamo poi:

$$\bar{a} = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \frac{1}{\sqrt{n+2}}, \dots\dots\right)$$

cioè $\bar{a} = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dove $a_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Otteniamo che:

1) $\bar{a} \notin \ell^2$ perché $\|\bar{a}\|_2^2 = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)^2 = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k+1} = +\infty$

2) $\bar{a} \in W$ perché $\|\bar{a}\|_{(,)}^2 = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k+1}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)^2 = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)^2} < +\infty$

3) $\bar{a}_n \in \ell^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, perché $\forall n\in\mathbb{N}$ a_n è una successione definitivamente nulla

4) $\|\bar{a}_n - \bar{a}\|_{(,)} \to 0$ perché $\|\bar{a}_n - \bar{a}\|_{(,)}^2 = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k+1}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)^2 = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)^2} \to 0$

PERCHÉ RESTO n-ESIMO DI UNA SERIE CONVERGENTE

Possiamo quindi concludere che $(\bar{a}_n)$ è una successione di oggetti di ℓ^2 che converge rispetto a $\|\cdot\|_{(,)}$ ad un oggetto $\bar{a}$ t.c. $\bar{a} \in W$ ma $\bar{a} \notin \ell^2$.
Ciò significa che ℓ^2 non è chiuso in W e quindi non può essere completo.
La dimostrazione che invece W è completo con $\|\cdot\|_{(,)}$ è molto simile a quella dell'ES. 4 LISTA 1BIS, che è stato svolto nella lezione scorsa.

—— o —— o —— o ——

FINE LEZIONE - INIZIO ESERCITAZIONE

ES. 7(b) LISTA 1 BIS Preso ℓ^2 con l'usuale norma $\|\cdot\|_2$, stabilire se ℓ^1 sia un suo sottospazio chiuso e/o denso.

SOLUZIONE Intanto $\ell^1 \subset \ell^2$ perché se $\bar{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ si ha $\sum |a_n| < +\infty$, quindi $a_n \to 0$, quindi definitivamente in n si ha $a_n^2 < |a_n|$, da cui segue che anche $\sum a_n^2$ converge, cioè $\bar{a} \in \ell^2$.
Quindi, effettivamente, ℓ^1 è un sottospazio di ℓ^2.
Si noti che è banalmente denso perché contiene la base di Hilbert canonica di ℓ^2.

Infine non può essere un sottospazio chiuso perché, essendo già denso, se fosse anche chiuso dovrebbe essere $\ell^1 = \ell^2$, ma questo è assurdo perché esistono $\bar{a} \in \ell^2$ che non stanno in ℓ^1, ad esempio $\bar{a} = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

ES. 9(c) LISTA 1 BIS Preso ℓ^2 con l'usuale norma $\|\cdot\|_2$, sia $W = \{(a_n) \in \ell^2 \mid \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} a_n = 0\}$.

Dire se W è un sottospazio chiuso e/o denso di ℓ^2.

SOLUZIONE Siano $\bar{a} = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ e $F : \ell^2 \to \mathbb{R}$, $\bar{b} \mapsto \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$.

Sappiamo che F è lineare e continua.

Inoltre W è il nucleo di F. Sappiamo quindi già che W è un sottospazio chiuso di ℓ^2 avente codimensione 1. Inoltre W non può essere anche denso perché altrimenti, essendo già chiuso, dovrebbe coincidere con tutto ℓ^2, mentre invece sappiamo che ha codimensione 1.

ES. 9(d) LISTA 1 BIS Preso ℓ^2 con l'usuale norma $\|\cdot\|_2$, sia $W = \{(a_n) \in \ell^2 \mid \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0\}$.

Dire se W è un sottospazio chiuso e/o denso di ℓ^2.

SOLUZIONE Intanto W è un sottospazio di ℓ^2, perché se $\bar{a} = (a_n)$ e $\bar{b} = (b_n)$ sono in W, allora $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha:

PERCHÉ TUTTE LE SERIE COINVOLTE CONVERGONO

$$0 = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \beta \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha a_n + \beta b_n$$

e quindi anche $\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} \in W$.

Mostriamo che è denso, cioè mostriamo che:

$$\forall \bar{a} \in \ell^2, \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{b} \in W \text{ t.c. } \|\bar{a} - \bar{b}\|_2 < \varepsilon.$$

Per comodità indichiamo con $\bar{a}_n$ la successione che coincide con $\bar{a}$ fino al termine n-esimo ed ha tutti i restanti termini uguali a zero, cioè poniamo:

$$\bar{a}_n = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots)$$

Si noti che $\|\bar{a} - \bar{a}_n\|_2^2 \to 0$ per $n \to +\infty$, perché

$$\|\bar{a}-\bar{a}_n\|_2^2 = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k^2$$

RESTO n-ESIMO DI UNA SERIE CONVERGENTE

Quindi posso scegliere $n_0 \in \mathbb{N}$ in modo che $\|\bar{a}-\bar{a}_{n_0}\|_2^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}$.

In generale $\bar{a}_{n_0} \notin W$, perché avremo:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n_0,k} = \sum_{k=0}^{n_0} a_k = C \in \mathbb{R}$$

e, in generale, avremo $C \neq 0$.

Prendiamo ora $m > \frac{4C^2}{\varepsilon^2}$ e definiamo:

$$\bar{b} = (a_0, a_1, \dots\dots, a_{n_0}, \overbrace{-\frac{C}{m}, -\frac{C}{m}, \dots\dots, -\frac{C}{m}}^{m \text{ TERMINI}}, 0, 0, \dots, 0, \dots)$$

Avremo che $\bar{b} \in W$ perché:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} b_k = \sum_{k=0}^{n_0} a_k + \sum_{k=n_0+1}^{n_0+m} -\frac{C}{m} = C + m\cdot\left(-\frac{C}{m}\right) = 0$$

Inoltre:

$$\|\bar{b}-\bar{a}_{n_0}\|_2^2 = \sum_{k=n_0+1}^{n_0+m} \frac{C^2}{m^2} = m\cdot\frac{C^2}{m^2} = \frac{C^2}{m} \underset{\text{PERCHÉ } m>\frac{4C^2}{\varepsilon^2}}{<} \frac{\varepsilon^2}{4}$$

Quindi $\bar{b} \in W$ e si ha:

$$\|\bar{b}-\bar{a}\|_2 = \|\bar{b}-a_{n_0}+a_{n_0}-\bar{a}\|_2 \leq \|\bar{b}-\bar{a}_{n_0}\|_2 + \|\bar{a}_{n_0}-\bar{a}\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Abbiamo cioè dimostrato che, qualsiasi fosse $\bar{a} \in \ell^2$, $\forall \varepsilon > 0$ possiamo sempre trovare $\bar{b} \in W$ tale che $\|\bar{a}-\bar{b}\|_2 < \varepsilon$.

Ciò significa che W è denso.

Infine W non è chiuso perché se lo fosse, essendo già denso, dovrebbe essere $W = \ell^2$. Ma così non è: ad esempio tutti gli elementi della base canonica di ℓ^2 non stanno in W.